Övningar till Flervariabelanalys

VIII. ANVÄNDNINGAR AV INTEGRALER

1. Ytan Y ges av $x = u\cos(v)$, $y = u\sin(v)$, $z = uv$ där $u^2 \leq v \leq 4$. Beräkna $\iint_Y dS$.

2. Ytan Y ges av $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = uv$, där $0 \leq u + v \leq 1$, $0 \leq u - v \leq 1$. Beräkna arean av Y.

3. Beräkna arean av rotationsytan som fås då $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$ roterar kring x-axeln.

4. Beräkna arean av rotationsytan som fås då $y = \tan x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, roterar kring x-axeln.

5. Beräkna arean av ytan som ges av $x^2 = 2yz$, $0 < x < y$ och $1 < x^2 + y^2 < 9$.

6. Beräkna arean av den del av ytan $z = \sqrt{2xy}$, som ligger ovanför triangeln med hörn i $(0,0), (0,1)$ och $(2,1)$.

7. Bestäm en ekvation för rotationsytan som uppstår då kurvan $z = e^{\sqrt{x}}$ roterar kring a) z-axeln b) x-axeln (i xyz-rummet).

8. Bestäm arean av ytan $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ ovanför triangeln $0 \leq y \leq x \leq 1$.

9. Beräkna arean av den rotationsyta, som erhålles då $x = t - t^2$, $y = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot t^{3/2}$, $0 \leq t \leq 1$, roterar kring a) x-axeln, b) y-axeln.

10. Vi betraktar alla cirklar som går genom origo och har sin medelpunkt på hyperbeln $xy = 1$. Beräkna arean av den del av planet genom vilken ingen av dessa cirklar passerar.

11. (a) Beräkna arean av ytan $r = (s\cos\phi, s\sin\phi, s + \phi)$, $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$.

    (b) Bestäm ytans tangentplan i punkten $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

12. Beräkna arean av den yta som bildas vid rotation av funktionskurvan $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $0 \leq x \leq 1$, runt x-axeln.

13. Beräkna arean av den yta som bildas vid rotation av funktionskurvan $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, runt x-axeln.

14. (a) Låt $X > 0$ och beräkna arean $A(x)$ av funktionsytan $z = e^{-x}\sin y$, $0 \leq x \leq X$, $0 \leq y \leq 2\pi$.

    (b) Beräkna $\lim_{X\to+\infty}(A(X) - 2\pi X)$.

15. Givet en sfär S i $\mathbf{R}^3$ med radien R och två parallella plan som bägge skär sfären S. Låt h beteckna avståndet mellan planen. Visa att arean av den del av sfären S som ligger mellan planen är en funktion av R och h och är oberoende av hur planen ligger i förhållande till sfärens tyngdpunkt.

X. VEKTORANALYS I RUMMET

1. Beräkna $\iint_Y (x+y+z)\,dS$ där Y är ytan som ges av $x = u\cos(v),\ y = u\sin(v),\ z = u(\cos(v)+\sin(v)),\ 0 \le u \le 1,\ 0 \le v < \pi/2$.

2. Beräkna $\iint_Y (x+2y)\,dS$ där Y är triangelytan med hörnen $(1,0,0), (0,0,3)$ och $(0,3,-9)$.

3. Beräkna $\iint_Y \sqrt{2-y^2-z^2}\,dS$, där Y är rotationsytan som fås då $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$, roterar kring x-axeln.

4. Beräkna $\iint_Y (x,0,y)\cdot N\,dS$, där Y ges av $x = u+v$, $y = u^2-v^2$, $z = uv$ med orientering given av normalen nedåt, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$.

5. Beräkna $\iint_Y (\cos x, -\sin z, 0)\cdot N\,dS$,
   där Y bestäms av $x = u+v$, $y = u^2 v$, $z = u-v$, och (u,v) tillhör triangelområdet med hörn i punkterna $(0,0), (2\pi,0)$ och $(2\pi,-2\pi)$. Orienteringen av N är given så att $N\cdot(0,1,0) > 0$.

6. Bestäm flödet av fältet $\boldsymbol{u} = (z,0,x^2)$ nedifrån genom den del av ytan $z = x^2+y^2$ som ligger över kvadraten $|x| \le 1, |y| \le 1$ i xy-planet.

7. Beräkna flödet genom ytan $2x+3y+6z = 12$, $x,y,z > 0$ för vektorfältet $(18z,-12,3y)$ (riktningen är bort från origo).

8. Beräkna flödet av $(xy,-x^2,x+z)$ bort från origo genom ytan $2x+2y+z = 6$, $x,y,z > 0$.

9. Beräkna $\iint_Y (y^3,z^2,x)\cdot \boldsymbol{N}dS$, där Y är den del av ytan $z = 4-x^2-y^2$ som ligger över planet $z = 2x+1$, orienterad med normalen nedåt.

10. Sök flödet av fältet $\boldsymbol{u} = (x,y,0)$ ut genom enhetssfären.

11. Sök totala flödet ut från ytan av tetraedern $x+y+z \le 3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ av fältet $\boldsymbol{u} = (x^2,y^2,z^2)$

12. Visa att volymen av en kropp K, är lika med $\frac{1}{3}\iint_{\partial K} (x,y,z)\cdot \boldsymbol{N}dS$, där $\boldsymbol{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen.

13. $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x^2+y^2 \ge 1\}$.
    Beräkna $\iint_{\partial K} (x+yz, y-xz, z-e^x\sin y)\cdot \boldsymbol{N}dS$

14. Beräkna $\iint_Y (x^2+y^2,2y,3z)\cdot N\,dS$, där Y ges av $x^2+y^2+z^2 = 1$ med normal utåt.

15. Beräkna $\iint_Y u \cdot N\,dS$, $u = (x^2, y^2, z^2 + a^2)$, där Y är halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z > 0$ och $N \cdot (0,0,1) > 0$.

16. Beräkna $\iint_Y (4x + y, 0, 2x + 5z) \cdot N\,dS$, där Y är sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ med utåtriktad normal.

17. Beräkna $\iint_Y u \cdot N\,dS$, där $u = (e^{\sqrt{yz}}, 4x + 3y + \sin xz, 1 + z^2)$ och Y ges av $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, med uppåtriktad normal.

18. Beräkna $\iint_Y c|r|^{-3} r \cdot N\,dS$, där Y är ellipsoiden $3x^2 + 7y^2 + 13z^2 = 6$ och N pekar utåt.

19. Beräkna $\iint_Y (0, 0, x^2) \cdot N\,dS$, där Y är mantelytan av konen med toppen i $(0,0,1)$ och bas $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$. Normalen pekar utåt.

20. Beräkna $\oint_{\mathcal{C}} y\,dx + z\,dy + x\,dz$ där $\mathcal{C}$ är skärningskurvan mellan ytorna $x^2+y^2+z^2 = a^2$ och $x + y + z = 0$, orienterad så att integralen blir ≥ 0.

21. Beräkna $\int_\gamma (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, där γ ges av $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 1$ och genomlöps ett varv moturs, sedd från punkten $(1, 0, 1)$.

22. Beräkna $\int_\gamma zdx + xdy + ydz$, där γ, som ges av cirkeln i planet $x + 2y + 2z = 5$ med medelpunkt $(1,1,1)$ och radie 3, genomlöps ett varv moturs, sedd från origo.

23. Beräkna $\int_\gamma ydx + (2x - z)dy + (3x + 2y)dz$, där γ är cirkeln i planet $x = z$ med medelpunkt i origo och radie 1, genomlöpt så att x avtar då $(0, 1, 0)$ passeras.

24. Beräkna $\int_\gamma xdy - ydz$, där γ, som ges av $z = x^2 + y^2$ och $z = 2x$, genomlöps ett varv moturs sedd från $(0, 0, 1)$.

25. Beräkna kurvintegralen $\int_C F \cdot dr$, där $F = (xy, y^2z, xz)$ och C är

   a) kurvan $r = (t^2 + 1, 2t + 1, 3t^2 + 1)$ med $0 \xrightarrow{t} 1$
   b) sträckan från $(1, 1, 1)$ till $(2, 3, 4)$.

26. Visa att fältet $\boldsymbol{u} = ((1 + x)e^{x+y}, xe^{x+y} + 2y, -2z)$ är konservativt genom att finna en potential för det. Beräkna $\int_\gamma \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{r}$, där γ går längs kurvan $(\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

27. Antag att $F = (2x + 2xy,\ x^2 + 2yz,\ y^2 + 3z^2)$. Beräkna: a) div F b) rot F
   c) (om möjligt) en potential $f(x, y, z)$ till F
   d) $\int_C F \cdot dr$, där C är $x = (t^3 + t)/2$, $y = (t^2 + t)/2$, $z = (t^5 - t^3)/8; 1 \xrightarrow{t} 2$.

28. Tangentplanet till funktionsytan $z = e^{x-y} + x^2$ i punkten $(1,1,2)$ skär paraboloiden $z = x^2 + y^2$ längs en kurva γ. Beräkna $\int_\gamma F \cdot dr$ då $F = (z, xy, y)$ och då γ antages positivt orienterad sedd från punkten $(3/2, -1/2, 0)$.

29. Låt C beteckna den ellips längs vilken planet $z = 2x + 2y + 1$ skär paraboloiden $z = x^2 + y^2 + 2$. Kurvan C antages positivt orienterad sedd från punkten $(0, 0, 10)$. Beräkna kurvintegralen $\int_C F \cdot dr$ då

a) $F = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(100-x^2-y^2-z^2)}}$
b) $F = (x^2y - z,\ 2xyz, y)$.

30. Beräkna $\displaystyle\iint_{\partial K} F \cdot N\,dS$, då $F = (xy, x, z)$ och K är den kropp i $\mathbf{R}^3$ som definieras av olikheterna $x^2 + y^2 \leq 1$, $x^2 + z^2 \leq 1$ och $z \geq 0$ (N betecknar utåtriktad enhetsnormalvektor).

31. Låt kurvan γ i $\mathbf{R}^3$ vara skärningen mellan konen $2x^2 + y^2 = z^2$ och planet $x + z = 1$. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma x^2y dx + (x - y + z)dy + (z + e^{xz})dz$, då γ orienteras moturs sedd uppifrån.

32. Beräkna $\displaystyle\iint_Y F \cdot N\,dS$, där $F = (x, yz, z^2)$, Y är randen till (den sneda) cylindern $(x - z)^2 + y^2 \leq z \leq 1$ och N är den utåtriktade enhetsnormalen till Y.

33. Låt $Y = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ och } x, y, z \geq 0\}$. Beräkna $\iint_Y F \cdot N\,dS$, då

$$F = (e^{x^2+y^2+z^2},\ x^2y,\ \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)) \quad \text{och} \quad N = (x, y, z).$$

34. Låt $F = (ye^{xy} + y^2z^3, xe^{xy} + 2xyz^3, 3xy^2z^2)$.

(a) Beräkna rot F och div F.

(b) Beräkna $\int_\gamma F \cdot dr$, då γ är sträckan från $(0, 2, 0)$ till $(1, 1, 1)$.

35. (a) Kroppen K i $\mathbf{R}^3$ definieras av olikheten $(x^2 + y^2 + z^2)^3 \leq z$. Beskriv kroppen med hjälp av rymdpolära koordinater.

(b) Beräkna $\iint_{\partial K} u \cdot N\,dS$, då $u = (xy^2, x^2y, 1)$, där N betecknar utåtriktad enhetsnormalvektor.

36. (a) Planet $2x - y + 4z = \frac{5}{2}$ skär paraboloiden $z = x^2 + y^2$ längs en kurva γ i rummet. Vilken punkt på kurvan ligger närmast origo?

(b) Bestäm kurvans tangent i denna punkt.

(c) Beräkna $\int_\gamma u \cdot dr$, då $u = (ye^{xy} + z, xe^{xy}, x)$ och då kurvan γ är positivt orienterad sedd ovanifrån.

37. Betrakta fältet $F = \left(\frac{x^2}{x+z} + 2x\ln(x + z), 1, \frac{x^2}{x+z}\right)$. Beräkna

(a) $\displaystyle\iint_Y F \cdot N\,dS$, där Y är randen till kroppen $1 \leq x + y \leq 4$, $0 \leq x - y \leq 2$, $1 \leq x + z \leq 2$ och där N betecknar utåtriktad enhetsnormalvektor.

(b) $\int_C F \cdot dr$, där C är kurvan $x = t$, $y = t^3$, $z = 1 + t$ från punkten $(0,0,1)$ till punkten $(1,1,2)$.

38. Beräkna

$$\int_C (y + z^2)dx + (x^2 + z)dy + (x + y)dz,$$

där C ges av skärningen mellan ytorna $z = 4 - x^2 - y^2$ och $x + y + z = 0$ (genomlöpt ett varv) med en sådan riktning att kurvintegralen blir icke-negativ.

39. Låt C vara en godtyckligt orienterad cirkel i planet $Ax + By + Cz = D$ och sätt

$$F(x, y, z) = (y, 2z, 3x).$$

Beräkna absolutbeloppet av kurvintegralen $\int_C F \cdot dr$.

40. Beräkna

$$\iint_Y \operatorname{rot} F \cdot N\, dS,$$

där $F(x, y, z) = (x^2 - y^2 + 3z,\ y^2 + z^2 - 2x,\ z^2 - 2x^2 + y)$ och Y ges av den del av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför ytan $z = 2$ och orienterad så att vektorn $(0,0,1)$ bildar spetsig vinkel med enhetsnormalen N till ytan.

SVAR

VIII.

1. $\frac{52}{3}\sqrt{2}$
2. $\frac{3}{8} + \frac{5}{32}\ln 5$
3. $\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1)$
4. $4\pi(\frac{5}{3} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(\frac{3+2\sqrt{2}}{4}))$
5. $2 + \frac{\pi}{2}$
6. $\frac{5}{3}$
7. a) $z = e^{\sqrt[4]{x^2+y^2}}$
   b) $x = \frac{1}{4}(\ln(y^2 + z^2))^2$
8. $\pi/(2\sqrt{2})$
9. a) $\frac{272}{105}\pi\sqrt{2}$ b) $\frac{2\pi}{3}$
10. 8
11. a) $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
    b) $(\sqrt{2}-1)x - (\sqrt{2}+1)y + \sqrt{2}z = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
12. $\dfrac{\pi}{2}(2 + \sinh 2)$
13. $2\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$
14. a) $2\pi\{\sqrt{2} - \sqrt{e^{-2X} + 1} + X + \ln(1 + \sqrt{e^{-2X} + 1}) - \ln(1 + \sqrt{2})\}$
    b) $2\pi\{\sqrt{2} - 1 + \ln 2(\sqrt{2} - 1)\}$

X.

1. $4\sqrt{3}/3$
2. $7\sqrt{26}/2$
3. $16\pi/3$
4. $\frac{5}{3}$
5. $8\pi^2$
6. $4/3$
7. 24
8. $27/4$

9. 4π

10. $8\pi/3$

11. $81/4$

12.

13. $12\sqrt{3}\pi$

14. $\frac{20\pi}{3}$

15. $(3\pi a^4)/2$

16. 12π

17. $7\pi/2$

18. $4\pi c$

19. $\pi/4$

20. $\sqrt{3}\pi a^2$

21. -4π

22. -15π

23. $-\pi\sqrt{2}$

24. 3π

25. a) 37.1 b) $\frac{245}{6}$

26. $1 - \pi^2/4 - e$

27. a) $2(1 + y + 4z)$ b) $(0, 0, 0)$
c) $x^2 + x^2y + y^2z + z^3$ d) 152

28. $-\frac{25}{4}\pi$

29. a) 0 b) $55\pi/4$

30. $8/3$

31. -3π

32. $5\pi/2$

33. $\dfrac{\pi}{4}(\dfrac{2}{15} + e + \ln 2)$

34. a) $0, y^2e^{xy} + x^2e^{xy} + 2xz^3 + 6xy^2z$
b) e

35. b) $\frac{\pi}{10}$

36. a) $(1/2, -1/4, 5/16)$
b) $(x, y, z) = (1/2, -1/4, 5/16) + t(1, 2, 0)$, $t \in \mathbf{R}$
c) 0

37. a) $33\ln 2 - 16$ b) $1 + \ln 3$

38. $\dfrac{27}{2}\pi$

39. $\frac{|2A+3B+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\pi R^2$,
där R är cirkelns radie

40. -8π