TMA 042
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Matematiska metoder E1, del D

Datum: 2003-06-03, kl. 14.15 - 18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Milena Anguelova, tel. 0740-459022.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
Skrivningen beräknas vara färdigrättad den 19/6. Tentor hämtas i mottagningsrummet på Matematiskt centrum.

==

1. Givet är kurvan

$$\begin{cases} x = \sin\left(1+\dfrac{s}{2}\right) \\ y = \cos\left(1+\dfrac{s}{2}\right) \\ z = \sqrt{3}\left(1+\dfrac{s}{2}\right) \end{cases}, \quad s \in [0,\infty).$$

(a) Visa att kurvan är parametriserad med båglängden som parameter. (2p)

(b) Beräkna kurvans krökning för godtyckligt värde på parametern s. (2p)

(c) Bestäm vektorerna **e**, **n** och **b** i en godtycklig punkt på kurvan. (2p)
När du löser (b) och (c) får du använda resultatet i (a) även om du inte har bevisat det.

2. Givet är vektorfältet $F(x,y,z) = (2xy, 3yz, 5xz)$. Beräkna det totala flödet av F bort från z-axeln genom den del av ytan $z = x^2+y^2$ som ligger under planet $z = 4$. (5p)

3. Givet är vektorfältet $F(x,y,z) = (\frac{1}{2}z^2 - xy, -yz, 0)$. Beräkna kurvintegralen $\int_C F \cdot dr$, där C är kurvan i vilken planet $x+y+z=1$ skär sfären $x^2+y^2+z^2=1$, orienterad moturs sedd från $(0,0,100)$. (6p)

4.(a) Givet är den 2-periodiska funktionen $f(x)$, där $f(x) = (x+1)e^x$ för $x \in (-1,1)$. Ange formlerna för f:s Fourierkoefficienter på både reell och komplex form. (2p)

(b) Utveckla f i antingen reell eller komplex Fourierserie. Motivera varför du väljer som du gör. (4p)

(c) Om $F(x)$ är Fourierseriens summa, ange $F(2)$ och $F(3)$. (2p)

(d) Är Fourierserien likformigt konvergent? Motivera! (2p)

5.(a) Visa att funktionsserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^n}$$

är konvergent för alla reella x och beräkna dess summa. (3p)

(b) Avgör om serien är likformigt konvergent på $\mathbb{R}$. (2p)

(c) Avgör om serien är likformigt konvergent på intervallet $(1, \infty)$. (2p)

6.(a) Formulera Gauss' divergenssats. (2p)

(b) Visa satsen för ett vektorfält på formen $(u_1, 0, 0)$. (5p)

7.(a) Formulera och bevisa Cauchys integralkriterium. (6p)

(b) Visa med hjälp av Cauchys integralkriterium att serien $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ är divergent. (1p)

(c) Om S_N betecknar den N-te partialsumman till serien i (b), visa att $S_N \sim \ln(\ln N)$ när $N \to \infty$. (2p)

/JM