TMA 042
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Matematiska metoder E1, del D

Datum: 2004-01-14, kl. 14.15 - 18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Mats Kjaer, tel. 0740-459022.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Givet är kurvan $x = e^{-t}\cos t,\ y = e^{-t}\sin t,\ t \in \mathbb{R}$. Bestäm kurvans krökning, torsion och krökningscentrum för godtyckligt t. (6p)

2. Det homogena klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ har genomborrats så att ett cylindriskt hål avgränsat av $x^2 + y^2 = a^2$ har bildats. Bestäm kroppens tröghetsmoment med avssende på z-axeln. (6p)

3. Ytan Y är en kubisk låda utan lock, vars botten är kvadraten $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$ i xy-planet. Bestäm flödet av vektorfältet $F(x,y,z) = (x^2+y^2, y^2+z^2, z^2+x^2)$ ut genom ytan Y. (6p)

4.(a) Givet är den 2π-periodiska funktionen $f(x)$, där $f(x) = |x-\pi|$ för $x \in (0, 2\pi)$. Ange formlerna för f:s Fourierkoefficienter på både reell och komplex form. (2p)

(b) Utveckla f i antingen reell eller komplex Fourierserie. Motivera varför du väljer som du gör. (4p)

(c) Om $F(x)$ är Fourierseriens summa, ange $F(-\pi)$ och $F(4\pi)$. (2p)

(d) Är Fourierserien likformigt konvergent? Motivera! (2p)

5. Avgör om funktionsföljden $f_n(x) = x(1-x)^n,\ n \in \mathbb{N}$, är likformigt konvergent på $[0,1]$. (6p)

6.(a) Definiera begreppen divergens och rotation. (2p)

(b) Vilka av följande påståenden är sanna? Ge bevis / motexempel. Skriv upp de tre vänsterleden i formell nablasymbolik.

(a) $\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\, u) = 0$; **(b)** $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, f) = 0$; **(c)** $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\, u) = 0$. (6p)

7.(a) Formulera och bevisa jämförelsekriteriet för positiva serier. (5p)

(b) Använd jämförelsekriteriet för att avgöra om serierna nedan konvergerar.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ (1p); **(ii)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$ (1p); **(iii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ (2p).