Övningsskrivning i TMA042d, Matematiska modeller E1, del D
Datum: 27/4 2002, kl. 8.45-10.45.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Jana Madjarova, tel. 775 77 63.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==

1. Givet är kurvan

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \qquad t \in [0, 2\pi] \qquad \text{(en cykloidbåge)}.$$

(a) Finn kurvans krökning, krökningsradie och torsion för godtyckligt värde på parametern $t \in [0, 2\pi]$. (2p)
(b) Finn kurvans maximala krökningsradie. (1p)
(c) Bestäm vektorerna $\mathbf{e}$ $(= \frac{d\mathbf{r}}{ds})$, $\varkappa\mathbf{n}$ $(= \frac{d\mathbf{e}}{ds})$ och $\mathbf{b}$ i en godtycklig punkt på kurvan. (3p)

2. Sök totala flödet av fältet (x, y, z) upp genom den del av ytan $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför xy-planet
(a) direkt (genom att beräkna en ytintegral); (4p)
(b) med hjälp av Gauss' divergenssats. (4p)

3. Planet $y + z = 2$ skär cylindern $x^2 + y^2 = 1$ i kurvan C. Beräkna

$$\int_C F \cdot dr,$$

där $F(x, y, z) = (xy, yz, zx)$ och C är orienterad moturs sedd från punkten $(0, 0, 100)$. (5p)

4.(a) Tag som utgångspunkt den generella formeln för arean av en buktig yta. Visa att arean av funktionsytan $Y : z = f(x, y),\ (x, y) \in D,\ (f \in C^1)$, är

$$\iint_Y dS = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dxdy. \qquad \text{(2p)}$$

(b) Definiera begreppet divergens och visa att $\operatorname{div}(\operatorname{grad}(xyz)) = 0$. (2p)

(c) Formulera Gauss' divergenssats. (2p)

6p - 11p:	1 bonuspoäng
12p - 17p:	2 bonuspoäng
18p - 23p:	3 bonuspoäng
24p - 25p:	4 bonuspoäng