Matematiska metoder E, del D

Numeriska serier och potensserier

Avgör om serierna nedan är konvergenta. I de fall parameter förekommer, undersök konvergensen för de värden parametern kan anta.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$.

2. $3 - \frac{3}{4} + \frac{3}{16} - \frac{3}{64} + \ldots$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{2+n}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{(n+1)!}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n+\ln n}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$.

14. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

15. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}, \quad p \in \mathbb{R}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx, \quad x \in \mathbb{R}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (4n-2)}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

20. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n}\right)^{n^3}, \quad a \in \mathbb{R}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - \ln\left(\sin \frac{1}{n^\alpha}\right)\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

23. Givet är att serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0,$ är konvergent. Visa att även serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ är konvergent.

Avgör om serierna i uppgift 24-26 är (a) konvergenta; (b) absolut konvergenta.

24. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$.

25. $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots$.

26. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.

Bestäm seriernas konvergensradier. Avgör om serierna är konvergenta i konvergensintervallets ändpunkter.

27. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} x^{2n}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n$.

Bestäm följande seriers summor.

32. $\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{2^n}{3^{n+1}}$.

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n2^n}$.

Fourierserier

Bestäm Fourierserien till var och en av följande funktioner (intervallet är $(-\pi, \pi)$):

1. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{då } \frac{\pi}{2} < |x| < \pi \end{cases}.$

2. $f(x) = |x|$.

3. $f(x) = x^2$.

4. $f(x) = x^2 + |x|$.

5. $f(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{då } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{då } 0 < x < \pi \end{cases}.$

6. Bestäm för alla $x \in \mathbb{R}$ Fourierseriens summa för serierna i **1-5**. Rita summans graf.

7. Utveckla i cos-serie på $(0, \pi)$ funktionen $\sin x$.

8. Utveckla x^2 i **(a)** Fourierserie med perioden 2 på $(-1, 1)$; **(b)** sin-serie på $(0, 1)$.

9. Utveckla $|\sin x|$ i Fourierserie med perioden π.

10. Finns det någon funktion sådan att $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$ existerar och som har Fourierserien $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$?

11. Bestäm summan av följande serier

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$;

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$;

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

Svar Numeriska serier och potensserier:

1. konvergent (summa ?);
2. konvergent (summa ?);
3. konvergent (summa ?);
4. konvergent (summa ?);
5. divergent;
6. divergent;
7. konvergent;
8. divergent;
9. divergent;
10. divergent;
11. konvergent, $S = \frac{1}{3}$;
12. konvergent, $S = 1 - \sqrt{2}$;
13. divergent;
14. divergent;
15. konvergent för $p > 1$, divergent för $p \leq 1$;
16. konvergent för $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, divergent för övriga;
17. konvergent;
18. konvergent;
19. divergent;
20. konvergent;
21. konvergent för $a \neq 0$;
22. konvergent för $\alpha > \frac{1}{2}$;
24. konvergent, ej absolut konvergent;
25. absolut konvergent;
26. konvergent, ej absolut konvergent;
27. $R = 4$, divergent i ändpunkterna;
28. $R = 1$, divergent i 1, konvergent i -1;
29. $R = 1$, konvergent i både 1 och -1;
30. $R = \frac{1}{e}$, divergent i ändpunkterna;
31. $R = 1$, divergent i ändpunkterna;
32. 2;
33. $\ln \frac{2}{3}$.

Svar Fourierserier:

1. $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cos{(2k-1)x}$;
2. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^{-2} \cos{(2k-1)x}$;
3. $\frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \cos kx$;
5. $\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos 2kx$;
7. $\frac{4}{\pi}[\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} (4k^2-1)^{-1} \cos 2kx]$;
9. $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kt}{4k^2-1}$;
10. nej;
11. $\frac{\pi^2}{8}$; $\frac{\pi^4}{96}$; $\frac{\pi^4}{90}$.