TMA 042
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Matematiska metoder E1, del D

Datum: 2004-08-23, kl. 14.15 - 18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Elin Götmark, tel. 0739-779268.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Givet är kurvan $C : r = (e^t, t\sqrt{2}, e^{-t}),\ t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestäm krökningen i en godtycklig punkt på kurvan. (3p)

(b) Bestäm planet som innehåller kurvans normal och binormal i den punkt där krökningsradien är minimal. (3p)

2. Givet är fältet $F = (e^x - y^3, e^y + x^3, e^z)$ och kurvan $C : r = (\cos t, \sin t, \sin 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(a) Visa att kurvan C är sluten och ligger i ytan $z = 2xy$. (2p)

(b) Visa att C projiceras på enhetscirkeln i xy-planet. (1p)

(c) Beräkna $\int_C F \cdot dr$. (5p)

3. Bestäm alla reella x för vilka potensserien nedan konvergerar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n. \qquad (4p)$$

4.(a) Givet är den jämna 2π-periodiska funktionen $f(x)$, där $f(x) = |1 - x|$ för $x \in (0, \pi)$. Ange formlerna för f:s Fourierkoefficienter på både reell och komplex form. (2p)

(b) Utveckla f i antingen reell eller komplex Fourierserie. Motivera varför du väljer som du gör. (4p)

(c) Om $F(x)$ är Fourierseriens summa, ange $F(0)$ och $F(3\pi)$. (2p)

(d) Är Fourierserien likformigt konvergent? Motivera! (2p)

5. Avgör om funktionsföljden $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n(x) = nxe^{-nx}$, är likformigt konvergent för **(a)** $x \in [0, \infty)$; **(b)** $x \in [1, \infty)$. (6p)

6.(a) Definiera begreppet rotation. (1p)

(b) Formulera Stokes' sats. (2p)

(c) Förklara sambandet mellan Stokes' sats och Greens sats. (max 3p)

7.(a) Definiera begreppet konvergens för numeriska serier. (2p)

(b) Formulera och bevisa Cauchys integralkriterium för positiva serier. (6p)

(c) Visa m.h.a. Cauchys integralkriterium att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ är divergent. (2p)