TMA 042
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Matematiska metoder E1, del D

Datum: 2005-01-12, kl. 14.00 - 18.00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Johanna Pejlare, tel. 073-9779268, besöker tentan ca 15.00; 17.00.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Givet är kurvan $C: \ x = a(t - \sin t); \ y = a(1 - \cos t), \ a > 0, \ t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestäm krökningen i en godtycklig punkt på kurvan. (3p)

(b) Visa att krökningsradien i en punkt på kurvan endast är beroende av punktens y-koordinat. (1p)

(c) Bestäm vektorerna **e**, **n** och **b** i en godtycklig punkt på kurvan. (3p)

2. Givet är vektorfältet $F = (yz, zx, xy)$. Bestäm flödet bort från z-axeln genom ytan $x^2 + y^2 = a^2, \ 0 \le z \le h$,

(a) direkt; (4p) **(b)** med hjälp av Gauss' sats. (4p)

3. Givet är kurvan $C: \ x = a\sin^2 t, \ y = 2a \sin t \cos t, \ z = a\cos^2 t, \ 0 \le t \le \pi$, och vektorfältet $F = (y + z, z + x, x + y)$.

(a) Visa att förutsättningarna för Stokes' sats är uppfyllda. (3p)

(b) Använd Stokes' sats för att beräkna $\int_C F \cdot dr$. (2p)

(c) Visa att kurvan är en ellips. (2p)

4.(a) Givet är den udda 2π-periodiska funktionen $f(x)$, där $f(x) = \frac{\pi}{2} - |\frac{\pi}{2} - x|$ för $x \in (0, \pi)$. Ange formlerna för f:s Fourierkoefficienter på både reell och komplex form. (2p)

(b) Utveckla f i antingen reell eller komplex Fourierserie. Motivera varför du väljer som du gör. (4p)

(c) Om $F(x)$ är Fourierseriens summa, ange $F(0)$ och $F(3\pi)$. (2p)

(d) Är Fourierserien likformigt konvergent? Motivera! (2p)

5. Visa att serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{k}}\right) x^k$$

är divergent i punkten $x = \frac{1}{2}$. (3p)

6. Formulera och bevisa Gauss' divergenssats. (7p)

7.(a) Definiera begreppet konvergens för numeriska serier. (2p)

(b) Formulera och bevisa Cauchys integralkriterium för positiva serier. (6p)

Betygsgränser: 20-29p: 3; 30-39p: 4; 40+: 5.

/JM