Repetitionsfrågor och Lösta typtal matematiska metoder E1 del D, vt 1999:

1: Derivering under integralen, krökning, torsion

Viktigt: Vad krävs för att få "derivera under integralen"? Hur definieras krökning, torsion? Vad ger de, hur beräknas de? Vad är det naturliga, rörliga koordinatsystemet (Frenet-frame)?

Tenta 96-01-05, uppg.6 :

Beräkna $\int_0^x \frac{ln(1+t\,x)}{1+t^2}dt$.

Lösning:

Funktionen $f(x,t)=\frac{ln(1+t\,x)}{1+t^2}$ satisfierar: f och $f'_x=\frac{t}{(1+t^2)(1+t\,x)}$ är kontinuerliga för $t\ge 0,\ x\ge$

resp $t\le 0,\ x\le 0$; för $g(x)=\int_0^x \frac{ln(1+t\,x)}{1+t^2}dt$ gäller alltså

$$g'(x)=\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)(1+t\,x)}dt+\frac{ln(1+x^2)}{1+x^2}\cdot 1= \text{ [pbu] } =\frac{1}{1+x^2}\int_0^x\left(\frac{-x}{1+tx}+\frac{x+t}{1+t^2}\right)dt+\frac{ln(1+x^2)}{1+x^2}=$$

$$=\frac{1}{1+x^2}\left[-ln(1+t\,x)+x\,arctan\,t+\tfrac{1}{2}ln(1+t^2)\right]_0^x+\frac{ln(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{x\,artctan\,x}{1+x^2}+\frac{ln(1+x^2)}{2(1+x^2)}$$, alltså är

$$g(x)=\int\frac{x}{1+x^2}arctan\,x\,dx+\tfrac{1}{2}\int\frac{ln(1+x^2)}{1+x^2}dx= \text{ [p.i.] } =$$

$$=\tfrac{1}{2}ln(1+x^2)\,arctan x-\tfrac{1}{2}\int\frac{ln(1+x^2)}{1+x^2}dx+\tfrac{1}{2}\int\frac{ln(1+x^2)}{1+x^2}dx=\tfrac{1}{2}ln(1+x^2)\,arctan x+c,$$

$g(0)=0$ ger $c=0$ och

svar: $\boxed{g(x)=ln\sqrt{1+x^2}\,arctan\,x}$

Anm: Du har t.ex. beräknat $\int_0^1 \frac{ln(1+t)}{1+t^2}dt=\frac{\pi ln 2}{8}$.

2: Yt- och trippelintegraler:

Viktigt: Hur beräknas trippelintegraler (itererad integration över standardområden !), arean av en yta Y $(=\iint_Y dS)$? Kan du räkna med rymdpolära koordinater (beräkna funktionaldeterminanten $=r^2\,sin(\theta)$)? Hur definieras (och beräknas) normalytintegral $(F=\iint_Y \mathbb{F}\bullet \mathsf{n}\,dS)$? $(F=\iint_D \mathbb{F}\bullet \mathsf{r}'_u\times\mathsf{r}'_v\,dudv$, om $Y:\mathsf{r}=(x(u,v),y(u,v)),(u,v)\in D$, resp. $F=\iint_D \mathbb{F}\bullet(-z'_x,-z'_y,1)\,dxdy$, om $Y:z=z(x,y),(x,y)\in D$, resp. $F=$

$\iint_D \mathbb{F}\bullet(h'_x,h'_y,h'_z)\frac{1}{|h'_z|}dxdy$, om $Y:h(x,y,z)=k,(x,y)\in D$;

F är oberoende av ytans parameterframställning!). Vad ger normalytintegralen ? (flödet !). Kan du satserna av Gauss och Stokes? Vad ger $div\,\mathbb{F}$, $rot\,\mathbb{F}$?

Kan du visa : $div\mathbb{F}=0 \Leftrightarrow \mathbb{F}=rot\mathsf{A}$ och $rot\mathbb{F}=\vec{0} \Leftrightarrow \mathbb{F}=grad\Phi$?

Uppgift:

Beräkna flödet av $grad(x^2y^2z^2)$ ut genom sfären $x^2+y^2+z^2=1$

Lösning:

$F=\iint_S (2xy^2z^2, 2x^2yz^2, 2x^2y^2z)\bullet \mathsf{n}\, dS =$ [$S: x^2+y^2+z^2=1$, $K: x^2+y^2+z^2\le 1$, $S=\partial K$, Gauss] =

$2\iiint_K \left(y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2\right)dxdydz$ = [rymdpolära koordinater] =

$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}\left(r^4\sin^2\theta\cos^2\theta + r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\sin^4\theta\right)r^2\sin\theta\, dr d\theta d\varphi =$ [integrera bort r] =

$= \frac{2}{7}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left((\cos^2\theta-\cos^4\theta)\sin\theta + \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi\sin^5\theta\right)d\theta d\varphi$ =

[integrera bort φ, $\sin^2 2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 4\varphi)$] $= \frac{2}{7}\int_0^{\pi}\left(2\pi(\cos^2\theta-\cos^4\theta)\sin\theta + \frac{\pi}{4}\sin^5\theta\right)d\theta =$

[$\sin^5\theta = (1-\cos^2\theta)^2\sin\theta = (1+\cos^4\theta-2\cos^2\theta)\sin\theta$] =

$= \frac{2\pi}{7}\left[2\left(-\frac{1}{3}\cos^3\theta+\frac{1}{5}\cos^5\theta\right)+\frac{1}{4}\left(-\cos\theta-\frac{1}{5}\cos^5\theta+\frac{2}{3}\cos^3\theta\right)\right]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{7}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right)\right) =$

$= \frac{8\pi}{7}\left(\frac{5-3}{15}+\frac{1}{8}\cdot\frac{15+3-10}{15}\right) = \frac{8\pi 3}{7\cdot 15}$ ***svar:*** $\boxed{\frac{8\pi}{35}}$

Tenta 96-08-26, uppg.3

Lösning:

a) $div\mathbb{F} = -2xy\sin\left(x^2+y^2+z^4\right)+2xze^{x^2+y^2+z^2}+2xy\sin\left(x^2+y^2+z^4\right)-2xze^{x^2+y^2+z^2}=0$,
alltså har $\mathbb{F}$ ett vektorpotential.

b) Sök $\mathsf{A}=(0, p, q)$ så att $rot\mathsf{A}=\left(q'_y-p'_z, -q'_x, p'_x\right)=\mathbb{F}$, dvs

$$\begin{cases} q'_y-p'_z = y\cos\left(x^2+y^2+z^4\right)+ze^{x^2+y^2+z^2} \\ -q'_x = -x\cos\left(x^2+y^2+z^4\right) \\ p'_x = 1-xe^{x^2+y^2+z^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q(x,y,z)=\frac{1}{2}\sin\left(x^2+y^2+z^4\right)+u(y,z) \\ p(x,y,z)=x-\frac{1}{2}e^{x^2+y^2+z^2}+v(y,z) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow q'_y-p'_z = y\cos\left(x^2+y^2+z^4\right)+u'_y+ze^{x^2+y^2+z^2}-v'_z = y\cos\left(x^2+y^2+z^4\right)+ze^{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow u'_y-v'_z=0$; välj $u=v\equiv 0$. Det ger oss då $\mathsf{A}=\left(0, x-\frac{1}{2}e^{x^2+y^2+z^2}, \frac{1}{2}\sin\left(x^2+y^2+z^4\right)\right)$.

c) Flödet är $F=\iint_S \mathbb{F}\bullet\mathsf{n}\, dS$ (n "uppåt" !).

c_1) med Stokes' sats: $F=\iint_S rot\mathsf{A}\bullet\mathsf{n}\, dS=\int_{\partial S}\mathsf{A}\bullet d\mathsf{r}=\int_{\partial S}(0dx+pdy+qdz)=$

$$= \left[\left| \begin{array}{l} z = 0 \Rightarrow dz = 0 \\ \partial S\colon\ x^2 + y^2 = 1,\ \text{moturs} \end{array} \right. : \left| \begin{array}{l} x = \cos\varphi, \\ y = \sin\varphi,\ dy = \cos\varphi\ d\varphi, \end{array} \quad 0 \xrightarrow{\ \varphi\ } 2\pi \right] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2\cos\varphi - e)\cos\varphi\ d\varphi = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi - e\cos\varphi)d\varphi = \tfrac{1}{2}\cdot 2\pi = \underline{\pi}\ .$$

c_2) <u>utan Stokes' sats:</u> Eftersom $\iint_{S\cup D} \mathbb{F} \bullet \cap\, dS = \iint_S \mathbb{F} \bullet \cap\, dS + \iint_D \mathbb{F} \bullet (0,0,-1)dxdy = [\text{Gauss!}] =$

$= \iiint_K div\mathbb{F}\, dxdydz = 0$ $[\partial K = S \cup D]$, så gäller $[\text{med } D\colon x^2 + y^2 \le 1]$:

$$F = \iint_S \mathbb{F} \bullet \cap\ dS = -\iint_D \mathbb{F} \bullet (0,0,-1)dxdy = \iint_D \left(1 - xe^{x^2+y^2}\right)dxdy = \pi - \iint_D xe^{x^2+y^2}\,dxdy = \pi$$

$$\left(\text{ty } \iint_D xe^{x^2+y^2}\,dxdy = [\text{pol.koord.}] = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 e^{r^2}\cos\varphi\ dr d\varphi = 0\right).$$

svar: $\boxed{\mathsf{A} = \tfrac{1}{2}\left(0, 2x - e^{x^2+y^2+z^2}, \sin\left(x^2 + y^2 + z^4\right)\right),\ \text{flödet är } \pi}$

3: Serier (numeriska, funktions-, potens-, Fourier-):

<u>Viktigt:</u> Vad är en serie? En konvergent, divergent serie? (delsummorna har gränsvärde eller ej). Absolut konvergent? Hur kan du avgöra konvergens/divergens? (Konvergenskriterier: jämförelse, majorant, integral, rot, kvot, Leibniz, asymptotisk ekvivalens...). Vad är punktvis, likformig konvergens av funktionsföljder (-serier)? Varför är likformig konvergens så viktig? Hur kan du visa likformig konvergens av en funktionsserie? Vad är en T-periodisk funktion? Vad är Fourierkoefficienterna till en sådan funktion? Vad är Fourierserien på cosinus-sinus-form, på amplitud-fasvinkelform, på komplex form? Sambandet? Kan du (visa, tolka) Parsevals formler?

<u>Uppgift:</u> För vilka reella x konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{2^k\sqrt{k}} x^k$?

<u>Lösning:</u> $\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{\arctan k}{2^k\sqrt{k}}} = \frac{\sqrt[k]{\arctan k}}{2\sqrt[k]{\sqrt{k}}} \to \frac{1}{2}$ då $k \to \infty$ $\left(0 < \sqrt[k]{\arctan k} < \sqrt[k]{\tfrac{\pi}{2}}\right)$, alltså konvergerar serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ för $|x| < 2$. För $x = -2$ är serien $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\arctan k}{k}$ konvergent enligt Leibniz [ty den är alternerande och $\frac{\arctan k}{k}$ går avtagande mot 0: sätt $f(x) = \frac{\arctan x}{\sqrt{x}}$: då är $f'(x) = \cdots = \frac{x^2\left(\frac{2}{x} - \arctan x\right) - \arctan x}{2x\sqrt{x}\left(1 + x^2\right)} < 0$ då x> 3...].

För $x = 2$ är serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{k}$ divergent ty $\frac{\arctan k}{k} \sim \frac{\pi}{2k}$ och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{2k}$ är divergent.

svar: $\boxed{-2 \le x < 2}$

Tenta 98-01-15,uppg.5:

Visa att $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{k}\right)^{k^3}\cos(k\pi x)$ är likformigt konvergent på $\mathbb{R}$.

Lösning:

$|f_k(x)| = \left|\left(\cos\frac{1}{k}\right)^{k^3}\cos(k\pi x)\right| \le \left(\cos\frac{1}{k}\right)^{k^3} = a_k$ för alla $x \in \mathbb{R}$ och $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent enligt rotkriteriet, ty $\sqrt[k]{|a_k|} = \left(\cos\frac{1}{k}\right)^{k^2} = e^{k^2 \ln\left(1+\cos\frac{1}{k}-1\right)} = e^{k^2\left(-\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{k^2}o(1)\right)} = e^{-\frac{1}{2}+o(1)} \xrightarrow{k\to\infty} e^{-\frac{1}{2}} < 1.$

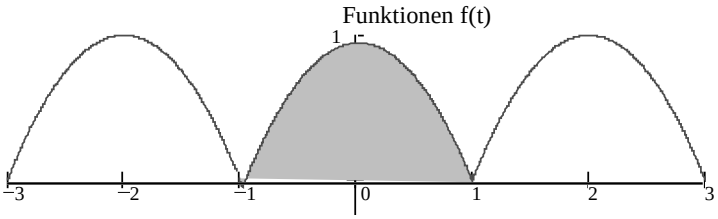
Weierstraß ger nu påståendet.

Tenta 96-08-26,uppg.2 :

Lösning:

$\Omega = \pi$, koefficienterna är :

$$c_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)e^{-jk\pi t}dt =$$



= [f är jämn !] =

$$= \int_0^1 (1-t^2)\cos k\pi t\,dt = [\text{ p.i., för } k \neq 0] = \left[\frac{(1-t^2)\sin k\pi t}{k\pi} - \frac{2t\cos k\pi t}{k^2\pi^2} + \frac{2\sin k\pi t}{k^3\pi^3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{-2(-1)^k}{k^2\pi^2},\ c_0 = \int_0^1 (1-t^2)dt = \frac{2}{3} \Rightarrow f(t) = \frac{2}{3} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2} e^{jk\pi t}.$$

På sinus-cosinus-form är $f(t) = \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2}\cos k\pi t$, alltså är

$$f(0) = 1 = \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{och}$$

$$f(1) = 0 = \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)}{k^2\pi^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$ Till sist ger Parseval

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^2 dt = \int_0^1 (1+t^4-2t^2)dt = \frac{8}{15} = \frac{4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{k^4\pi^4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

svar:

$$f(t) = \frac{2}{3} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2} e^{jk\pi t}$$

serierna har summorna $\frac{\pi^2}{6}$, $\frac{-\pi^2}{12}$, $\frac{\pi^4}{90}$ respektive.

4:Steg- och impulsfunktion:

Viktigt: Lär dig räkna med θ och δ, ffa $\theta' = \delta$.
Skriv t.ex. *f(t)* i uppg.4 (tenta 95-01-07) i intervallet -2<*t*<2 mha Heavisides stegfunktion (lösn: Labb !).

Tenta 87-09-07, uppg.3 :Bestäm alla lösningar till (DE) $y''(x) - y(x) = 1 + \delta'(x) + x\theta(x)$.

Lösning:

Det karakteristiska polynomet $r^2 - 1$ har rötterna ±1, alltså är den allmänna homogena lösningen $y_h(x) = Ae^x + Be^{-x}$. En partikulär lösning till $y'' - y = 1$ är $y_1 = 1$. För att få en partikulär lösning till $y''(x) - y(x) = \delta'(x) + x\delta(x)$ ansätter vi $y_2(x) = u(x)\theta(x)$, då är
$y_2'(x) = u'(x)\theta(x) + u(x)\delta(x) = u'(x)\theta(x) + u(0)\delta(x)$ och
$y_2''(x) = u''(x)\theta(x) + u'(x)\delta(x) + u(0)\delta'(x) = u''(x)\theta(x) + u'(0)\delta(x) + u(0)\delta'(x)$. Insättning i (DE) ger: $(u''(x) - u(x))\theta(x) + u'(0)\delta(x) + u(0)\delta'(x) = x\theta(x) + \delta'(x)$, och det är uppfyllt om

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) = x \\ u'(0) = 0,\ u(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad u(x) = ae^x + be^{-x} - x \text{ (löses s.o.),}$$

$$\begin{cases} u(0) = a + b = 1 \\ u'(0) = a - b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 0.$$

svar:

$$u(x) = Ae^x + Be^{-x} + (e^x - x)\theta(x) - 1$$

Lycka till !

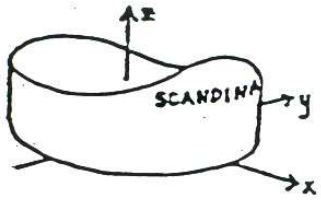
April 1999
Bernhard

Några repetitionsuppgifter (matem.metoder E1, del D, vt 99)

1. Beräkna $\int_0^{\pi} ln\left(1+3sin^2\, x\right)dx$ [ledn: Visa att $\int_0^{\pi} ln\left(1+p\,sin^2\, x\right)dx = 2\pi\, ln\frac{1+\sqrt{1+p}}{2}$].

2. Scandinavium i Göteborg definieras (i lämpligt koordinatsystem) av olikheterna

$0 \le z \le 15+\frac{x^2}{500}$, $x^2+y^2 \le 2500$.



Beräkna normalytintegralen $\iint_S \boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{n}\; dS$,

där $\boldsymbol{v}=(x,y,2z)$ och S är Scandinaviums yttervägg och tak med utåtriktad enhetsnormal $\boldsymbol{n}$.

[Kan det ha att göra med den dåliga luften efter en ishockeymatch?]

3. Beräkna $\iiint_{\Omega}\left(xy+yz+zx\right)dxdydz$, där $\Omega=\left\{(x,y,z):\, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$

a) direkt **b)** med Gauss' divergenssats.

[ledn: integranden = $\frac{1}{2}div\left(x^2y, y^2z, z^2x\right)$, eller $= div\left(xyz, xyz, xyz\right)$]

4. Man staplar tegelstenar på ett horisontellt underlag så att kortändan på varje tegelsten skjuter utanför kortändan på den sten, som ligger närmast under. Man har ett obegränsat antal tegelstenar till sitt förfogande. Hur långt kan man med bibehållen balans hos stapeln få den översta stenen att skjuta utanför den understa?

5. För vilka reella x konvergerar potensserien $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$?

Bestäm seriens summa för dessa x.

6. Beräkna $\lim_{x\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x+k(k+1)}$.

7. Funktionen f är udda, har perioden 4 och $f(t)=(1-t)\theta(1-t)$ för $t\in(0,2)$.

Utveckla f i Fourierserie och visa att $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}sin\frac{k\pi}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k\pi}sin\frac{k\pi}{2}\right)^2$

(alltså $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$).

svar

2. 162500π **3.** .2 **4.** Hur långt som helst **5.** $|x|\le 1$ **6.** 1

7. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k\pi-4\,sin\frac{k\pi}{2}}{(k\pi)^2}sin\frac{k\pi}{2}t$