

Något om funktionsföljder/funktionsserier

1. Punktvise och likformig konvergens

Vi betraktar reellvärda funktioner med gemensam definitionsområde $D \subset \mathbb{R}$, $M \subset D$. Men (nästan) allt går helt analogt för komplexvärda funktioner (av en komplex variabel).

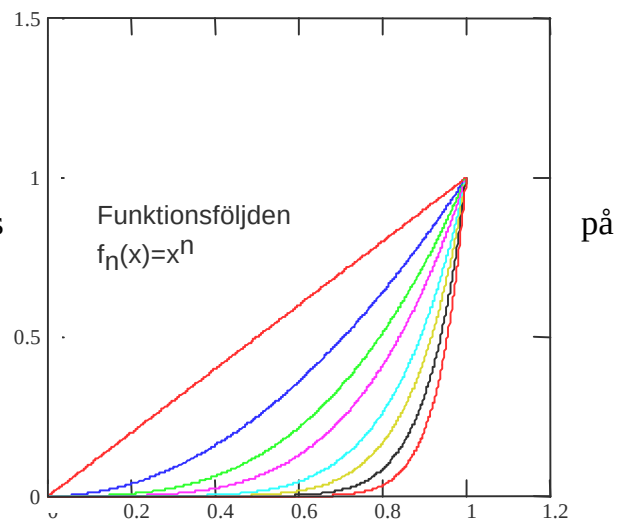
DEF Vi säger: FUNKTIONSFÖLJDEN f_n KONVERGERAR PUNKTVIS MOT f PÅ M , och skriver $f_n \rightarrow f$ punktvise på M , om $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ för alla $x \in M$. f kallas gränsvfunktionen till $(f_n)_{n=1}^\infty$.

EX 1 $f_n(x) = x^n$, $M = [0,1]$:

för $x = 1$ gäller $\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$ och för $0 \leq x < 1$

gäller $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, alltså konvergerar x^n punktvise

$[0,1]$ mot $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{då } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{då } x = 1 \end{cases}$.

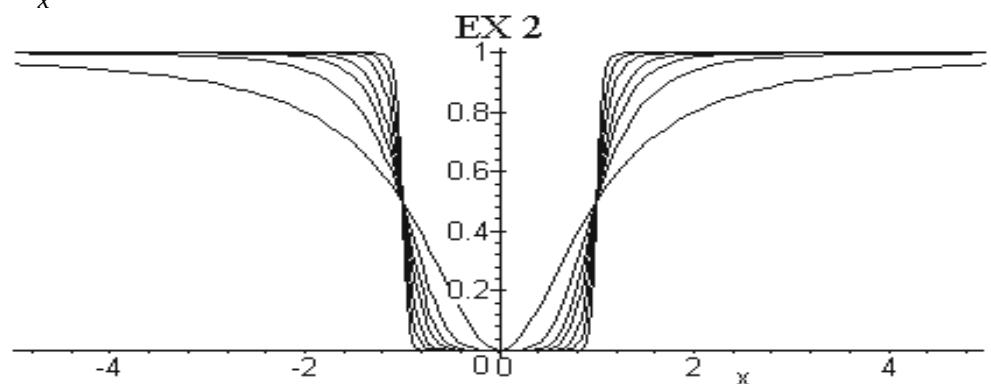


EX 2 $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, $M = \mathbb{R}$:

$f_n(\pm 1) = \frac{1}{1+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$, $f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, för $|x| < 1$: $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{x^{2n}+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{0}{0+1} = 0$,

och för $|x| > 1$: $f_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{x^{2n}}+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{0+1} = 1$, alltså konvergerar f_n punktvise mot

$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{då } |x| < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{då } |x| = 1 \\ 1, & \text{då } |x| > 1 \end{cases}$



Frågan är nu, vilka egenskaper (kontinuerlig, deriverbar, integrerbar..) överförs från f_n till gränsfunktionen f , mera precist: gäller

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' \quad \text{och} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx,$$

dvs: får man byta "ordningen av gränsvärdena"?

Svaret är nej, som exemplena ovan visar. Det krävs något mer än "konvergens i varje punkt":

f_n konvergerar punktvis mot f på M , om det till varje $\varepsilon > 0$ och till varje $x \in M$ finns ett $N_0(\varepsilon, x)$ (N_0 beror på ε och x !), så att $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ för alla $n > N_0(\varepsilon, x)$.

Det som krävs för att svaret skall vara ja, är att man till varje $\varepsilon > 0$ kan hitta ett $N_0(\varepsilon)$ som duger för alla $x \in M$:

DEF Vi säger: f_n KONVERGERAR LIKFORMIGT MOT f PÅ M , och skriver $f_n \rightarrow f$ likformigt på M , om det till varje $\varepsilon > 0$ finns ett $N_0(\varepsilon)$ så att för alla $x \in M$ och $n > N_0(\varepsilon)$ gäller att $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

ANM a) Likformig (eng: *uniform*) konvergens är starkare än punktvis (eng: *pointwise*) konvergens: $f_n \rightarrow f$ likformigt på $M \Rightarrow f_n \rightarrow f$ punktvis på M , men omvändningen är fel, som våra exempel och följande sats visar.

b) Vi säger: f_n är punktvis, resp likformigt, konvergent på M , om det finns en funktion f så att f_n konvergerar punktvis, resp likformigt, mot f på M .

Då kan vi nu visa att likheterna ovan gäller för likformigt konvergenta funktionsföljder:

SATS 1

Föruts: $f_n \rightarrow f$ likformigt på $[a, b]$ och alla f_n är kontinuerliga på $[a, b]$.

Påst: a) f är kontinuerlig på $[a, b]$.

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Bev: a) Vi skall visa att till $x_0 \in [a, b]$ och godt. $\varepsilon > 0$ finns δ så att $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ för alla $x \in [a, b]$ med $|x - x_0| < \delta$:

Eftersom f_n konvergerar likformigt mot f på $[a, b]$, så finns ett N_0 så att för alla $x \in [a, b]$ och $n > N_0$ gäller: $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$; för t.ex. $n_0 = N_0 + 1$ gäller (eftersom f_{n_0} är

kontinuerlig) att det finns ett δ så att $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ för $|x - x_0| < \delta$ och då gäller för

$$\begin{aligned} \text{dessa } x: |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \text{vsv} \end{aligned}$$

b) Vi skall visa att till godt. $\varepsilon > 0$ finns N_0 så att för $n > N_0$ gäller:

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon: \text{ Eftersom } f_n \text{ konvergerar likformigt mot } f \text{ på } [a, b], \text{ så finns ett } N_0$$

så att för alla $x \in [a, b]$ och $n > N_0$ gäller: $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$; men då gäller för $n > N_0$:

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dx = \varepsilon. \quad \text{vsv}$$

SATS 2

Föruts: $f_n \in C^1((a, b))$, f'_n konvergerar likformigt mot g i (a, b) och

$(f_n(x_0))_{n=1}^\infty$ är konvergent för något $x_0 \in (a, b)$.

Påst: f_n konvergerar likformigt mot en C^1 -funktion f i (a, b) och $f' = g$,

dvs: $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} (f'_n(x))$ för alla $x \in (a, b)$.

Bev: g är kontinuerlig (sats1) i (a, b) ; sätt $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ och för $x \in (a, b)$

$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt$. Funktionen f är C^1 med $f' = g$ i (a, b) . Kvar att visa:

f_n konvergerar likformigt mot f i (a, b) :

Eftersom f'_n konvergerar likformigt mot g i (a, b) så finns till godt. $\varepsilon > 0$ ett N_1 så att för alla

$t \in (a, b)$ och $n > N_1$ gäller $|f'_n(t) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$; vidare finns ett N_2 så att för $n > N_2$ gäller

$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (ty $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$). Men då gäller för $n > N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ och alla

$x \in (a, b)$ att

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt - \left(f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt \right) \right| \leq \\ &\leq |f_n(x_0) - f(x_0)| + \left| \int_{x_0}^x (f'_n(t) - g(t)) dt \right| \leq |f_n(x_0) - f(x_0)| + \int_{x_0}^x |f'_n(t) - g(t)| dt \leq \\ &\leq |f_n(x_0) - f(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_{x_0}^x dt \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dt = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{vsv} \end{aligned}$$

En tillfredsställande behandling av likformig konvergens kräver "supremum"-begreppet. Men vårt intresse gäller huvudsakligen funktionsserier, och för dessa har vi Weierstraß' kriterium, vilket man klarar sig långt med. Först en självklar "kom ihåg"-definition:

2. Funktionsserier

DEF Låt u_k vara funktioner med gemensam definitionsområde D och $M \subset D$. Vi säger:

FUNKTIONSSERIEN $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ är PUNKTVIS, resp. LIKFORMIGT

KONVERGENT PÅ M , om följden av delsummorna $S_N = \sum_{k=1}^N u_k$ är punktvis, resp. likformigt konvergent på M .

SATS 3 (Weierstraß' majorantsats)

Om $|u_k(x)| \leq a_k$ för alla $x \in M$ och $k \in \mathbb{N}$ och om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är

konvergent, så är funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ absolut och likformigt konvergent på M .

Bev: Låt $\varepsilon > 0$; eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent, så finns ett N_0 så att $\sum_{k=N_0+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$ och för

$N > N_0$ gäller då $\left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) - S_N(x) \right| = \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$ (oberoende av x !).

VSV

Observera att det räcker att $|u_k(x)| \leq a_k$ gäller f.o.m. något N_0 .

EX 3 Funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{x}{k}$ är likformigt konvergent på varje $[-R, R]$ ($0 < R \in \mathbb{R}$),

ty $\left| \frac{1}{k} \sin \frac{x}{k} \right| \leq \frac{R}{k^2}$ för alla k och $x \in [-R, R]$ och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R}{k^2}$ är konvergent.

Satserna 1 och 2 ger nu direkt för funktionsserier:

SATS 4

Föruts: Funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ är likformigt konvergent och alla u_k är kontinuerliga på $[a, b]$.

Påst: a) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ är kontinuerlig på $[a, b]$.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) dx$.

SATS 5

Föruts: $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k$ är likformigt konvergent i (a,b) , $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$ är konvergent för något $x_0 \in (a,b)$ och alla $u_k \in C^1((a,b))$.

Påst: $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ är likformigt konvergent och $\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k$ i (a,b) .

Bev: Delsummorna S_N är kontinuerliga på $[a,b]$, resp. C^1 i (a,b) , sats1,2 ger påståendena!

Så, det var allt. Som ett första och viktigt exempel tittar vi på potensserier och visar satserna 1 och 2, sid 12:19 i kursboken (JP). Ett annat viktigt exempel blir Fourierserier.

SATS 6

Föruts: Potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ har konvergensradie $R > 0$ och summan $S(x)$ ($|x| < R$).

Påst: Serien, den termvis deriverade serien och den termvis integrerade serien har samma konvergensradie R och är likformigt konvergenta i $M = \{x : |x| < R\}$.

$$a) S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}, \quad S''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} \dots \quad \text{för } x \in M.$$

$$b) \int_0^x S(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} c_k x^{k+1} \quad \text{för } x \in M.$$

Bev: Låt $0 < r < R$. Weierstraß' majorantsats ger att $\sum_{k=0}^n c_k x^k$ är likformigt konvergent på $[-r, r]$,

ty $|c_k x^k| \leq |c_k| r^k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| r^k$ är konvergent ($r < R$!); vidare är $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$ likformigt

konvergent på $(-r, r)$, ty för $|x| < r$ gäller $|k c_k x^{k-1}| = k \left(\frac{|x|}{r} \right)^{k-1} |c_k| r^{k-1} < |c_k| r^{k-1}$ för

$k > \text{något tillräckligt stort } N$ ($\lim_{k \rightarrow \infty} k q^{k-1} = 0$ då $0 < |q| < 1$ och $0 \leq q = \frac{|x|}{r} < 1$).

Satserna 4/5 ger påståendena för varje intervall $(-r, r)$; men eftersom varje x med $|x| < R$ ligger i ett sådant intervall $(-r, r)$ (välj t.ex. $r = \frac{|x| + R}{2}$) så är satsen visad. vsv

3. Uppgifter

- 1) Låt $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$. Är $(f_n)_{n=1}^\infty$ likformigt konvergent på $[0,1]$? [ledn: gäller sats1b ?]
- 2) Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2 x)}{k^2}$ är likformigt konvergent på $\mathbb{R}$ och diskutera vad som händer om du deriverar termvis.
- 3) Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cos \frac{x}{k}$ är likformigt konvergent på $\mathbb{R}$. [ledn: derivera termvis, använd sats2]
- 4) Beräkna $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k} e^{-kx}}{\sqrt{x+k-1}}$.
- 5) Visa att $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (x+k)^{-2}$ är likformigt konvergent i $[0,1]$ och beräkna $\int_0^1 S(x) dx$.
- 6) Låt $f_n(x) = \ln(\cos \frac{x}{n})$.
 - a) Visa att $\sum_{n=3}^{\infty} f_n$ är likformigt konvergent i $(-\pi, \pi)$.
 - b) Gäller $\left(\sum_{n=3}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=3}^{\infty} f_n'(x)$ för $|x| < \pi$?
- 7) Visa att funktionen f som ges av $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-kx}}{(1+k)^2}$ är lösning till differentialekvationen $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{e^x - 1}$, $0 < x$.

svar

- 1) nej 4) $\frac{1}{e-1}$ 5) 1 6b) ja

funktionsföljden i uppg.1

