

TENTOR MATEMATIK FÖR E1 DEL D**96-08-26**

2. Funktionen f har perioden 2 och $f(t) = 1 - t^2$ för $|t| < 1$.
Utveckla f i komplex Fourierserie och beräkna med hjälp härav

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}. \quad (7p)$$

3. Givet är kraftfältet

$$\mathbf{F} = \left(y \cos(x^2 + y^2 + z^4) + ze^{x^2 + y^2 + z^2}, -x \cos(x^2 + y^2 + z^4), 1 - xe^{x^2 + y^2 + z^2} \right).$$

- a) Visa att $\mathbf{F}$ har en vektorpotential (utan att beräkna en sådan). (2p)

- b) Bestäm en vektorpotential $(0, p(x, y, z), q(x, y, z))$ till $\mathbf{F}$. (4p)

- c) Då kurvan $z = \arccos x$, $0 \leq x \leq 1$, roterar kring z -axeln uppstår en rotationsyta S ; beräkna flödet av $\mathbf{F}$ uppåt genom S

- c₁) med Stokes' sats c₂) utan Stokes' sats (3p var). (6p)

96-05-18

2. Låt $g(t) = e - e^{|t-1|}$.

- a) Skriv $g(t)$ m.h.a. $q(t)$ (utan belopp) och bestäm $g'(t)$ och $g''(t)$.

- b) Funktionen $f(t)$ har perioden 2 och $f(t) = g(t)$ för $0 < t < 2$. (2p)

Utveckla $f(t)$ i Fourierserie på amplitudfasvinkelform

$$\text{och beräkna } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e - (-1)^k}{1 + k^2 \pi^2}. \quad (7p)$$

3. Låt $\mathbf{F} = (x + y + xz^2, x + y + 1, x^2z + 1)$.

- a) Visa att $\mathbf{F}$ är ett gradientfält (utan att beräkna en potential). (2p)

- b) Bestäm en potential till $\mathbf{F}$. (3p)

- c) Låt $l: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. I vilka punkter kan en partikel hamna då den

förflyttas från origo längs l och kraftfältet uträttar arbetet 8? (4p)

- d) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $z > 0$. (6p)

95-09-04

3. Funktionen f är udda, har perioden 4 och för $0 < t < 2$ är
 $f(t) = t - 2(t-1)q(t-1)$.

- a) Rita kurvan $y = f(t)$ för $-5 \leq t \leq 5$. (1p)

- b) Utveckla f i Fourierserie. (4p)

c) Beräkna mha b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ och $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$. (3p)

5. $\mathbf{F} = (y^2, z^2, x^2)$ är hastighetsvektorn i en gasströmning.

a) Bestäm den gasvolym som per tidsenhet strömmar upp genom

torusytan $Y: \begin{cases} x = (4 + \cos y) \cos j \\ y = (4 + \cos y) \sin j, 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq j \leq 2\pi \\ z = \sin y \end{cases}$ (6p)

b) Bestäm en vektorpotential till $\mathbf{F}$ (dvs. bestäm $\mathbf{A}$ så att $\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{F}$). (3p)

95-05-20

1. Beräkna massan av kroppen $K = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{8 - x^2 - y^2}\}$, då dess densitet är $r(x, y, z) = |xyz|$. (6p)

3. Betrakta $\mathbf{F} = (yz \sin(xyz) + 1, xz \sin(xyz) + y, xy \sin(xyz) + z^2)$.

a) Visa att $\mathbf{F}$ är ett gradientfält och bestäm en potential till $\mathbf{F}$. (6p)

b) Beräkna det arbete som $\mathbf{F}$ uträttar då en partikel förflyttas längs

kurvan $C: \begin{cases} x = te^t \cos t \\ y = te^{3t} \sin t, 0 \xrightarrow{t} \frac{\pi}{2} \\ z = te^{2t} \end{cases}$ (3p)

4. Betrakta $\mathbf{F} = (xy^2 - xz \cosh(xyz), yz \cosh(xyz) - 3z^2, y^2(3 - z))$.

a) Visa att $\mathbf{F}$ är källfritt. (2p)

b) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ut genom cylindern $x^2 + y^2 = 4, 1 \leq z \leq 7$. (4p)

5. Funktionen f har perioden 1 och $f(t) = te^t, 0 < t < 1$.

Utveckla f i Fourierserie på komplex form och på amplitud-fasvinkelform. (7p)

95-01-07

3. Låt $\mathbf{F} = \left(2x \ln(x + y) + \frac{x^2}{x + y}, \frac{x^2}{x + y}, 2z \right)$.

a) Visa att $\mathbf{F}$ är ett gradientfält och bestäm en potential till $\mathbf{F}$. (4p)

b) Beräkna $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $C: \begin{cases} x = t + \cos(2\pi t) \\ y = t^2 + \sin(\pi t), 0 \xrightarrow{t} 1 \\ z = t^3 + \cos(\pi t) \end{cases}$ (2p)

c) Beräkna $\iint_Y \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, där Y är randen till kroppen

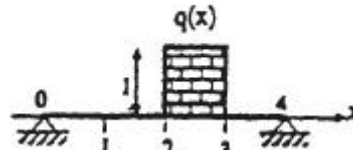
$\{(x, y, z) : 0 \leq z \leq x + y, 1 \leq x + y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}$ med utåtriktad normal $\mathbf{n}$. (6p)

4. Funktionen f har perioden 2 och $f(t) = e^{-t}q(1-t)$ för $0 < t < 2$.
Utveckla f i Fourierserie på komplex form och på amplitudfasvinkelform.

Beräkna med hjälp härav $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e - (-1)^k}{1 + p^2 k^2}$ och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e - (-1)^k)^2}{1 + p^2 k^2}$. (8p)

94-09-05

3. Belastningen $q(x)$ på en fritt upphängd balk anges genom figuren :



- a) Beräkna böjmomentet, dvs. lös problemet
 $M''(x) = -q(x), 0 < x < 4, M(0) = M(4) = 0$.

I vilken punkt är böjmomentet maximalt ?

(6p)

- b) Funktionen $f(x)$ har perioden 4 och $f(x) = q(x)$ för $0 < x < 4$.
Utveckla f i Fourierserie.

(6p)

4. Låt $F(x, y, z) = (\cos x, xy \cos z + (y + z) \sin x, -x \sin z)$ vara hastighetsvektorn för en stationär strömning av en inkompressibel vätska.

- a) Visa att F är källfritt och bestäm en vektorpotential för F
(ledn.: ansätt $A(x, y, z) = (p(x, y, z), 0, q(x, y, z))$).

(7p)

- b) Bestäm volymen av den vätskemängd som per tidsenhet strömmar "nedåt" genom funktionsytan

$Y : z = \left(\pi - \sqrt{x^2 + y^2} \right) e^{-\frac{1}{4} \cos \sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{\pi}{2}$. (6p)

SVAR:

96-05-18: 2a) $g'(t) = 2 \cosh(t-1) \theta(t-1) + e^{1-t}$, $g''(t) = -2 \sinh(t-1) \theta(t-1) - 2 \delta(t-1) - e^{1-t}$ summan är $\frac{1}{2}$.		b) $1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e - (-1)^k}{1 + k^2 \pi^2} \cos(k\pi t + \pi)$,
95-09-04: 3) $\sum \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2 \pi^2} \sin \frac{(2k+1)\pi}{2} t$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi^4}{96}$		5a) 136π b) $(\frac{1}{3}z^3, -y^2z + \frac{1}{3}x^3, 0)$
95-05-20: 1) $32/3$ 3a) $-\cos(xyz) + x + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}z^3$		b) $\frac{\pi^2(3+\pi)e^{3\pi}}{24}$ 4) 24π
5) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2n\pi j t} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2k\pi t + \alpha_k)$ där $c_n = \frac{1-2en\pi j}{(1-2n\pi j)^2}$, $A_0 = 1$, $A_k = \frac{2\sqrt{1+4e^2 k^2 \pi^2}}{1+4k^2 \pi^2}$ och $\alpha_k = 2 \arctan(2k\pi) - \arctan(2ek\pi) (k > 0)$		
95-01-07: 3a) $x^2 \ln(x+y) + z^2$ b) $4 \ln 3 - 1$ c) $18 \ln 3 + \frac{208}{9}$		
4) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e - (-1)^n}{2e(1+n\pi j)} e^{n\pi j} = \frac{e-1}{2e} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e - (-1)^k}{e\sqrt{1+k^2 \pi^2}} \cos(k\pi t - \arctan k\pi)$, summorna är $\frac{1}{2}$ resp $e-1$.		
94-09-05: 3a) $M(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 \theta(x-3) - \frac{1}{2}(x-2)^2 \theta(x-2) + \frac{3}{8}x$, maximalt i $\frac{19}{8}$		
b) $\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left(\sin \frac{3n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} x + ((-1)^n - \cos \frac{3n\pi}{2}) \sin \frac{n\pi}{2} x \right)$		4a) $(xy \sin z, 0, (y+z) \cos x)$ b) 0

Matematik, CTH&GU

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del D, 2000-01-13, kl 14.15-18.15**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa**Telefon:****OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. Beräkna arean av ytan $Y: z = \frac{2}{3} \left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} \right), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x.$ (4p)
2. Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = \text{grad} \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2} \right), C_1: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi \\ z = \sin t \end{cases}, C_2: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi \\ z = \sinh \sqrt{t} \end{cases}.$
 - a) Beräkna $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ (5p) och $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ (2p). (7p)
 - b) Beräkna krökningsradien av kurvan $C_1.$ (4p)
3. Beräkna flödet av fältet $\mathbf{F} = \left(\frac{2}{3} x^3 + yz, y^3 + xz, 2z^3 + \sinh(x^2 y^2) \right)$ ut genom ytan $Y: 2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 4.$ (6p)
4. Funktionen f har period 2 och $f(t) = e^{-|t|}$ för $|t| < 1.$
 - a) Skriv f med hjälp av stegfunktioner för $-1 < t < 3.$ (2p)
 - b) Visa att $f(t) = 1 - e^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(e - (-1)^n)}{e(1 + n^2 \pi^2)} \cos(n\pi t)$ för alla $t \in \mathbb{R}.$ (6p)
 - c) Är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e - (-1)^n}{1 + n^2 \pi^2} \cos(n\pi t)$ likformigt konvergent på $\mathbb{R}?$ (2p)
 - d) Beräkna $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e - (-1)^n}{1 + n^2 \pi^2}$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e - (-1)^n}{1 + n^2 \pi^2} \right)^2.$ (4p)
5. Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} \left(k - k^2 \sin \frac{1}{k} \right) \cos k\pi$ är betingat konvergent. (6p)
6. a) Visa att ett konservativt C^1 -fält är virvelfritt. (2p)
 - b) Visa att om $\sum_{k=0}^{\infty} c_k a^k$ ($a \in \hat{A}$) är konvergent så är $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ absolut konvergent för alla $z \in \hat{A}$ sådana att $|z| < |a|.$ (5p)
 - c) Formulera Stokes' sats. (2p)

BB

Matematik, CTH&GU

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del D, 1999-08-23, kl 8.45-12.45**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa**Telefon:****OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. Beräkna arean av ytan $Y: \begin{cases} x = \sin(u+v) + \cos(u+v) \\ y = \sin(u+v) - \cos(u+v), \quad 0 \leq v \leq u \leq \pi \\ z = u - v \end{cases}$ (5p)

2. Beräkna volymen av den kropp som i rymdpolära koordinater ges av $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r^3 \leq \theta + e^{\cos \theta}$. (5p)

3. Beräkna flödet av $\mathbf{IF} = (\cosh(x+y+z)-1, x^2y - \cosh(x+y+z), 1-x^2z)$ bort från origo genom cylindermantelytan $Y: x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$. (6p)

4. Låt $\mathbf{IF} = \left(\frac{1}{x} + \frac{yz^2}{2\sqrt{xz}}, \frac{1}{y} + \frac{xz^2}{\sqrt{xz}}, \frac{1}{z} + \frac{3xyz}{2\sqrt{xz}} \right)$.
 a) Visa att $\mathbf{IF}$ är konservativt i $\Omega: x > 0, y > 0, z > 0$. (2p)

b) Beräkna det arbete som $\mathbf{IF}$ uträttar då en partikel förflyttas från $(1, 2, \pi)$ till $(3, 2, 2\pi)$ längs skruvlinjen $(2 + \cos t, 2 + \sin t, 2\pi - t)$. (4p)

5. Beräkna för $0 < p < 1$
 $\sum_{k=0}^{\infty} p^k \cos kt, \sum_{k=1}^{\infty} p^k \sin kt, \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{1 + p^2 - 2p \cos t} dt$ och $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{(1 + p^2 - 2p \cos t)^2} dt$
 [ledning: Fourierutveckla $\frac{1}{1 - pe^{it}}$...]. (8p)

6. Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n^2 + \sqrt{n}}}{n} - 1 \right) \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$ är likformigt konvergent på $\mathbb{R}$. (6p)

7. d) Visa att kurvintegralen $\int_{\gamma} \mathbf{IF} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen om fältet $\mathbf{IF}$ är virvelfritt och C^1 i $\mathbb{R}^3$. (4p)

e) Skriv upp formlerna för krökning och för torsion av en C^3 -kurva i $\mathbb{R}^3$. (4p)

f) Formulera och bevisa rotkriteriet för serier. (6p)

BB

Matematik, CTH&GU

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del D, 1999-06-01, kl 14.15-18.15**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa**Telefon:****OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. Ange en ekvation för tangentplanet till ytan

$$Y: \begin{cases} x = 6 \ln(1 + u^2 + v^2) + \sin(2u + v) \\ y = \sinh(u + v) + \cos(u - v) \\ z = \cosh(u + v) + 2u \end{cases} \quad \text{i punkten } (x(0,0), y(0,0), z(0,0)). \quad (3p)$$

2. Låt
- $IF = (\cosh(x + y), \cosh(x + y) + 2yz^3, 3y^2z^2 - 1)$

$$\text{och } C: \begin{cases} x = \cos 4t + \cos 2t - 4 \cos t + 2 \\ y = \sin 4t - \sin 2t - 4 \sin t \\ z = t \cos t \end{cases}.$$

- c) Visa att
- IF
- är konservativt och beräkna det arbete som
- IF
- uträttar då en partikel förflyttas längs kurvan
- C
- från
- $(0,0,0)$
- till
- $(8,0,-\pi)$
- . (5p)

- d) Beräkna krökningen av kurvan
- C
- i punkten
- $(0,0,0)$
- . (4p)

3. Beräkna flödet av fältet
- $IF = (x^2 + yz, y^2 + xz, z + \cosh(x^2 + y^2))$

$$\text{uppåt genom ytan } Y: z = 1 + (x^2 + y^2 - 1)^3, \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 2. \quad (6p)$$

4. För vilka
- p
- har klotet
- $K: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$
- ändlig massa då dess densitet är
- $\rho(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^p$
- ? Beräkna
- K
- 's totala massa för dessa
- p
- . (4p)

5. Funktionen
- f
- har period 2 och
- $f(t) = \sinh(t)$
- för
- $|t| < 1$
- .

- a) Skriv
- f
- med hjälp av stegfunktioner för
- $0 < t < 4$
- . (2p)

- b) Är Fourierserien till
- f
- likformigt konvergent på
- $[0, 4]$
- ? (2p)

- c) Utveckla
- f
- i Fourierserie på amplitudfasvinkelform. (6p)

- d) Vad ger Parsevals formel? (2p)

6. För vilka komplexa
- z
- konvergerar potensserien
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} - 1 \right) z^n$
- ? (6p)

7. g) Är ett virvelfritt
- C^1
- fält källfritt? (3p)

- h) Formulera och bevisa integralkriteriet för serier. (5p)

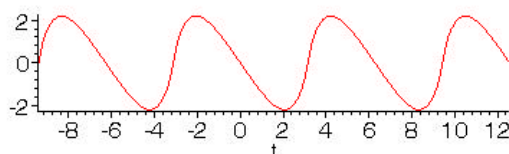
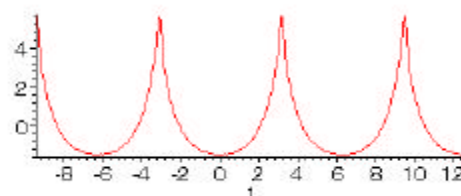
- i) Visa att
- $f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$
- för
- C^1
- funktioner
- f
- . (2p)

BB

CTH&GU, matematik

Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del D, 1999-01-14, kl 14.15-18.15**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa.**Telefon:****OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat !

- =====
1. Rita funktionskurvan $y = 2(x+1)\theta(x+1) + 2x(x-3)\theta(x) - 2(1-x)^2\theta(x-1)$ för $-2 \leq x \leq 2$. (2p)
 2. Betrakta kraftfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = r^3(x, y, z)$ där $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ och kurvan $C: \mathbf{r}(t) = (t \cos t, t \sin t, 2t)$, $0 \rightarrow \pi$.
 - a) Är $\mathbf{F}$ konservativt? Om ja, bestäm en potential till $\mathbf{F}$. (3p)
 - b) Beräkna det arbete som $\mathbf{F}$ uträttar då en partikel förflyttas längs kurvan C . (3p)
 - c) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ upp genom ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $z \geq 0$. (6p)
 - d) Beräkna krökningen av kurvan C i punkten $(-\pi, 0, 2\pi)$. (4p)
 3. Beräkna arean av ytan $Y: (u, v) \mapsto (2u + v, 2u - v, uv + 2)$, $4u^2 + v^2 \leq 8$, $v \geq 0$. (5p)
 4. Betrakta funktionen $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6 \cos((3n+2)\frac{\pi}{3})}{\sqrt{n^5 + n}} \cos\left(nt + \arctan\left(\frac{60\pi}{\sqrt{n^4 + 1}}\right)\right)$.
 - a) Visa att f är en periodisk C^1 -funktion och utveckla f' i Fourierserie på amplitudfasvinkelform. Motivera väl! (7p)
 - b) Visa att $\int_0^{2\pi} f^2(t) dt < \frac{2\pi^5}{5}$ [du får utnyttja att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$]. (3p)
 5. För vilka reella x konvergerar potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \sinh\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$? (6p)
 6.
 - a) Formulera Stoke's sats. (3p)
 - b) För vilka $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gäller $\nabla \times (\nabla \Phi) = \vec{0}$? Visa formeln för dessa Φ . (3p)
 7. Formulera och bevisa integralkriteriet för serier. (5p)

Uppg.4: $f(t)$: $f(t)$:

BB

svar till gamla tentor matem. metoder för E, del D (2000)

00-01-13:

1. $\frac{2}{15}(9\sqrt{3}-8\sqrt{2}+1)$ 2a. 0 resp. $\sinh^2 \sqrt{2\pi}$ b. $\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos^2 t)^3}$
 3. $\frac{64\pi}{15}$ 4a. $e^{-|t|}\theta(t+1)+\left(e^{-|t-2|}-e^{-|t|}\right)\theta(t-1)$ c. ja d. $\frac{1}{2}$ resp. $\frac{4e-e^2-3}{4}$

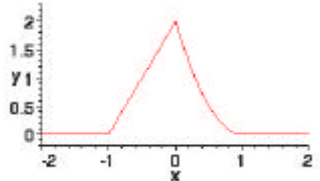
99-08-23:

1. $\sqrt{2}\pi^2$ 2. $\frac{2\pi}{3}(\pi+2\sinh 1)$ 3. $\frac{\pi}{4}$ 4b. $2\pi\sqrt{\pi}(2\sqrt{6}-1)+\ln 6$
 5. $\frac{1-p\cos t}{1+p^2-2p\cos t}$ resp. $\frac{p\sin t}{1+p^2-2p\cos t}$ resp. $\frac{\pi}{2}$ resp. $\frac{\pi}{2(1-p^2)}$

99-06-01:

1. $2x-2y-z+3=0$ 2a. $\pi+\sinh 8$ b. $\frac{16}{5}$ 3. $\pi(2+\sinh 2)$
 4. massan ändlig $\Leftrightarrow p > -\frac{3}{2}$, massan $=\frac{4\pi}{2p+3}$ då
 5a. $\sinh(t)(\theta(t)-\theta(t-1))+\sinh(t-2)(\theta(t-1)-\theta(t-3))$ b. nej
 c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi\sinh(1)}{1+(n\pi)^2} \cos\left(n\pi t + \frac{\pi}{2}(-1)^n\right)$ d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+(n\pi)^2)^2} = \frac{\sinh 2-2}{8\pi^2 \sinh^2(1)}$ 6. $|z| \leq 1$

99-01-14:

1.  2a. ja, $\frac{1}{5}r^5$ b. $5\sqrt{5}\pi^5$ c. 54π
 d. $\sqrt{\frac{20+8\pi^2+\pi^4}{(5+\pi)^3}}$ 3. $\frac{32\pi(2\sqrt{2}-1)}{3}$
 5. $[-1,1)$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6\sqrt{n}\cos(n+\frac{2}{3})\pi}{\sqrt{n^4+1}} \cos\left(nt + \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{60\pi}{\sqrt{n^4+1}}\right)$

99-08-23: ytorna i uppg.1

och

i uppg. 2

