

Övningar till matematiska metoder E1, del D, vt 2000

V. KRÖKNING OCH TORSION FÖR KURVOR

1. Bestäm krökning och krökningsradie för kurvan $C: t \mapsto (t^6, t^4, t^2)$ i punkten $(1,1,1)$.
2. Beräkna krökning och torsion av kurvan $\mathbf{r}(t) = (t, 1-t, e^t \sin(1-t))$ i punkten $(1,0,0)$.
3. Bestäm krökning och krökningsradie för kurvan $C: t \mapsto (\cos(2t), 2t - \sin(2t), 4 \sin(t))$ i punkten $C(\frac{\pi}{2})$.
4. Härled formeln $\kappa(t) = \pm \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{\sqrt{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^3}}$ för krökningen av en C^2 -kurva $C: t \mapsto (x(t), y(t))$ i planet och kom på (och visa) ett samband mellan "konvex/konkav" och "positiv/negativ krökning".
[ledn: betrakta kurvan $t \mapsto (x(t), y(t), 0)$ i $\mathbb{R}^3$! Eller sid. 8:10 i JP2 förstås]
5. Bestäm krökning och krökningsradie för kurvan $y = \tan x$ i punkten $(\frac{\pi}{4}, 1)$.
6. Bestäm maximala krökningen för kurvan $y = \sinh x$.
7. Bestäm krökning och krökningsradie för ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, 0 < b \leq a$.
I vilka punkter är krökningen maximal/minimal? Diskutera även fallet $a = b$.

svar:

1. $\kappa = \frac{\sqrt{19}}{7\sqrt{14}}, R = \frac{1}{\kappa}$
2. $\kappa(1) = \frac{2\sqrt{2}e}{(2+e^2)^{\frac{3}{2}}}, \tau(1) = 0$
3. $\kappa = \frac{\sqrt{2}}{4}$
5. $\kappa = \frac{4}{5\sqrt{5}}$
6. $\kappa = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ för $x = \pm \ln(1 + \sqrt{2})$
7. min i $(0, \pm b)$, max i $(\pm a, 0)$; om $a = b$, så är krökningsradien = cirkelns radie
$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

kurvan i uppg.2

