

VECKANS PROBLEM

PROBLEM 2 (lösningen skall vara klar må/ ti 27/28 mars)

a) Beräkna volymen av kroppen $\{(x, y, z) : -y \leq x \leq y \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$.

b) Beräkna massan av kroppen $\{(x, y, z) : 0 \leq y \leq 2 - z \leq x \leq 2\}$ då dess densitet är $\rho(x, y, z) = \frac{x + y}{2x + y + z - 2}$.

c) Beräkna $\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{1 + (x^2 + 2y^2 + 3z^2)^3} dx dy dz$.

Lösningsförslag till VP1

a) $\mathbf{r}(t) = (\ln(t+1), \arctan t, t - t^2) \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}(t) = \left(\frac{1}{1+t}, \frac{1}{1+t^2}, 1-2t\right) \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}}(t) = \left(\frac{-1}{(1+t)^2}, \frac{-2t}{(1+t^2)^2}, -2\right)$,

alltså är i origo $\dot{\mathbf{r}}(0) = (1, 1, 1)$, $\ddot{\mathbf{r}}(0) = (-1, 0, -2) \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}(0) \times \ddot{\mathbf{r}}(0) = (-2, 1, 1)$. Därmed är

krökningen i origo $\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} = \frac{|(-2, 1, 1)|}{|(1, 1, 1)|^3} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. För torsionen $\tau = \frac{\ddot{\mathbf{r}} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}$

behövs $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \left(\frac{2}{(1+t)^3}, \frac{-2+6t^2}{(1+t^2)^3}, 0\right) \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}}(0) = (2, -2, 0)$, därmed är torsionen i origo

$$\tau = \frac{(2, -2, 0) \cdot (-2, 1, 1)}{|(-2, 1, 1)|^2} = \frac{-6}{6} = -1.$$

svar: $\kappa(0) = \frac{\sqrt{2}}{3}, \tau(0) = -1$

b) En kurva i planet har parameterframställningen

$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), 0) \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), 0) \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), 0)$, alltså är

$\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) = (0, 0, \dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t))$, detta ger formeln för krökningen.

För en funktionskurva $y = f(x)$ är $\mathbf{r}(x) = (x, f(x), 0) \Rightarrow x' = 1, x'' = 0$, formeln ger då sambandet mellan krökningen och f'' .

c) Arealen av ytan $Y : (u, v) \mapsto \left(u^2, uv, \frac{v^2}{2}\right)$, $(u, v) \in D = \{(u, v) : 0 < u < 1, 0 < v < 3\}$ är

$$m(Y) = \iint_Y dS = \iint_D |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| du dv. \text{ Här är } \mathbf{r}'_u(u, v) = (2u, v, 0), \mathbf{r}'_v(u, v) = (0, u, v),$$

och därmed $\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v) = (v^2, -2uv, 2u^2)$, alltså är

$$m(Y) = \iint_D \sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + 4u^4} du dv = \int_0^3 \left(\int_0^1 (v^2 + 2u^2) du \right) dv = \int_0^3 \left(v^2 + \frac{2}{3} \right) dv = \frac{1}{3} 3^3 + \frac{2}{3} 3 = 11.$$

REPETITIONSFRÅGOR matem. metoder del D för E1, 2000

Moment 2: Ytintegral, trippelintegral

1. Vad är areaelementet, resp. arean av en yta? Beräkning?
2. Vad är normalintegral? Beräkning? Vad ger den?
3. Hur beräknas trippelintegraler? Hur görs variabelsubstitution i trippelintegraler?
Kan du dem rymdpolära koordinaterna (beräkna funktionaldeterminanten)?
Hur definieras (beräknas) generaliserade trippelintegraler?

Till 2: $F = \iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ är "flödet av $\mathbf{F}$ genom Y i riktning $\mathbf{n}$ ".

$$F = \iint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \, dudv, \text{ om } Y: \mathbf{r} = (x(u,v), y(u,v)), (u,v) \in D,$$

$$F = \iint_D \mathbf{F} \cdot (-z'_x, -z'_y, 1) \, dxdy, \text{ om } Y: z = z(x,y), (x,y) \in D,$$

$$F = \iint_D \mathbf{F} \cdot (h'_x, h'_y, h'_z) \frac{1}{|h'_z|} \, dxdy, \text{ om } Y: h(x,y,z) = k, (x,y) \in D, h'_z \neq 0.$$

Extrauppgift (rotationsytor):

Då kurvan $C: 0 \leq y = f(x), 0 \leq a \leq x \leq b$ roterar kring x -axeln resp.

kring y -axeln alstras en rotationsyta Y som har parameterframställningen

$Y: \mathbf{r} = \mathbf{r}(x, \varphi) = (x, f(x)\cos(\varphi), f(x)\sin(\varphi)), a \leq x \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (kring x -axeln) resp.

$Y: \mathbf{r} = \mathbf{r}(x, \varphi) = (x\cos(\varphi), f(x), x\sin(\varphi)), a \leq x \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (kring y -axeln).

a) Motivera detta och beräkna areaelementet av Y och arean av Y i båda fall.

b) Samma uppgift då kurvan ges av $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), a \xrightarrow{t} b$.

c) Beräkna arean av den rotationsyta som uppstår då kurvan

$$y = \arccos(x-1) + \sqrt{2x-x^2}, 0 \leq x \leq 2 \text{ roterar kring } x\text{-axeln, resp. kring } y\text{-axeln.}$$

d) En torus bildas då cirkeln $(x-a)^2 + y^2 = b^2, 0 < b < a$ roterar kring y -axeln.

Beräkna dess area.

svar:

a) $dS = f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2} \, dxd\varphi, m(Y) = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2} \, dx$ (kring x -axeln),

$$dS = x\sqrt{1+(f'(x))^2} \, dxd\varphi, m(Y) = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+y'^2} \, dx \text{ (kring } y\text{-axeln) [med } y = f(x)].$$

b) $dS = yds$ resp $dS = xds, m(Y) = 2\pi \int_c^c yds$ resp $m(Y) = 2\pi \int_c^c xds$ [$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt$;

obs: kurvan skall ligga i första kvadranten; a) är ett specialfall av b)].

c) $\frac{8\pi(3\pi-4)}{3}$ resp $\frac{32\pi}{3}$ [tillägg: kurvans krökningsradie är $\sqrt{8x}$] d) $4\pi^2 ab$

OBS **Övningstentan** lö 8 april, kl. 8.45-10.45 i MN-salarna, omfattar kap 5,7,8,10 i PB. Den ger INT(P/6) bonuspoäng som adderas årets del-D-tentor.