

VECKANS PROBLEM

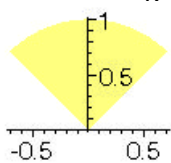
PROBLEM 3 (lösningen skall vara klar må/ ti 3/4 april)

Låt $\mathbf{F} = (2x + 2xy, x^2 + 2yz, y^2 + 3z^2)$.

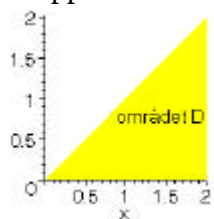
- Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ bort från origo genom ytan $x = \sqrt{4 - y^2 - z^2}$, $x \geq 0$.
- Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ut genom sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
- Visa att $\mathbf{F}$ är ett gradientfält och bestäm en potential till $\mathbf{F}$.
- Beräkna $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $C: t \mapsto \left(\frac{1}{2}(t^3 + t), \frac{1}{2}(t^2 + t), \frac{1}{8}(t^5 - t^3)\right)$, $1 \xrightarrow{t} 2$.

Lösningsförslag till VP2

- Kroppens volym är
$$\iiint_K dx dy dz = \iint_D \left(\int_y^{\sqrt{x^2+y^2}} dz \right) dx dy = \iint_D (\sqrt{x^2+y^2} - y) dx dy =$$

området D : 
$$= [\text{pol. koord.}] = \int_0^1 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} r^2 (1 - \sin \varphi) d\varphi dr = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2} \right).$$

- Kroppens massa är
$$\iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{2-x}^{2-y} \frac{x+y}{2x+y+z-2} dz \right) dx dy =$$



$$\begin{aligned} &= \left[\int \frac{1}{2x+y+z-2} dz = \ln|2x+y+z-2| \right] = \int_0^2 \left(\int_0^x (x+y)(\ln 2x - \ln(x+y)) dy \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left[\frac{1}{2}(x+y)^2 (\ln 2x - \ln(x+y)) + \frac{1}{4}(x+y)^2 \right]_{y=0}^{y=x} dx = \\ &= \int_0^2 \left(x^2 - \frac{\ln 2}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right) dx = \underline{2 - \frac{4 \ln 2}{3}}. \end{aligned}$$

c) Välj som uttömmande följd ellipsoiderna $K_n : x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq n^2$:

$$I_n = \iiint_{K_n} \frac{1}{1+(x^2+2y^2+3z^2)^3} dx dy dz = \left[\text{med } \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ \sqrt{2} y = r \sin \theta \sin \varphi \\ \sqrt{3} z = r \cos \theta \end{cases} \text{ blir } K'_n : \begin{cases} 0 \leq r \leq n \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^n \frac{1}{1+r^6} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{6}} [-\cos \theta]_0^\pi \left[\frac{1}{3} \arctan(r^3) \right]_0^n = \frac{4\pi \arctan n^3}{3\sqrt{6}}, \text{ därmed fås}$$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{1+(x^2+2y^2+3z^2)^3} dx dy dz = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{2\pi^2}{3\sqrt{6}}.$$

$$\text{sv} \quad \boxed{\frac{\sqrt{6} \pi^2}{9}}$$

REPETITIONSFRÅGOR matem.metoder del D för E1, 2000

Moment 3: kraftfält, divergens, rotation

1. Kan du satserna av Gauss och Stokes?
2. Hur definieras och vad ger $\text{div} \mathbf{F}$, $\text{rot} \mathbf{F}$?
3. Kan du (räkna med) nabla-operatorn ∇ ?
4. (Som i del C!) Vad är ett konservativt kraftfält? En potential? Egenskaper?
5. Kan du visa: $\text{div} \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{F} = \text{rot} \mathbf{A}$ och $\text{rot} \mathbf{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \mathbf{F} = \text{grad} \Phi$?

Extrauppgifter:

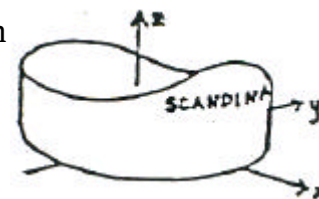
1. Scandinavium i Göteborg definieras (i lämpligt koordinatsystem) av olikheterna

$$0 \leq z \leq 15 + \frac{x^2}{500}, \quad x^2 + y^2 \leq 2500. \text{ Beräkna normalytintegralen}$$

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \text{ där } \mathbf{v} = (x, y, 2z) \text{ och } S \text{ är Scandinaviums}$$

yttervägg och tak med utåtriktad enhetsnormal $\mathbf{n}$.

[Kan det ha att göra med den dåliga luften efter en ishockeymatch?]



2. Beräkna $\iiint_{\Omega} (xy + yz + zx) dx dy dz$, där $\Omega = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

a) direkt **b)** med Gauss' divergenssats.

[ledn: integranden = $\frac{1}{2} \text{div}(x^2 y, y^2 z, z^2 x)$, eller = $\text{div}(xyz, xyz, xyz)$]

sv:

1. 162500π
2. $.2$