VECKANS PROBLEM

PROBLEM 4 (lösningen skall vara klar to/fr 13/14 april)

a) För vilka rella tal p konvergerar serierna

a1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^p 2^{-n}$ **a2)** $\sum_{n=1}^{\infty} n^p n^{-2}$ **a3)** $\sum_{n=1}^{\infty} p^n 2^n$ **a4)** $\sum_{n=1}^{\infty} n^p p^n$?

b) För vilka reella x konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{2^k \sqrt{k}} x^k$?

Lösningsförslag till VP3

a) Ytan Y är den "högre hemisfären" $x^2+y^2+z^2=4, x \geq 0$. Parametrisering av Y (t.ex. $(\theta,\varphi) \mapsto 2(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) skulle leda till besvärliga integraler.

Men om vi lägger till ytan $D: y^2+z^2 \leq 4$ i yz-planet, så är $Y \cup D$ begränsningsyta till kroppen K: $x^2+y^2+z^2 \leq 4, x \geq 0$ (normalen utåt!) och vi kan använda Gauss:

$$\iint_{Y\cup D} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dS = \iint_Y \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dS + \iint_D \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}_1\, dS \underset{Gauss}{=} \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\, dxdydz = \iiint_K 2(1+y+4z)\, dxdydz,$$

alltså $$\iint_Y \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dS + \underbrace{\iint_D \underbrace{\mathbf{F} \bullet (-1,0,0)}_{=0 \text{ på } D} dS}_{=0} = 2\iint_D \left(\int_0^{\sqrt{4-y^2-z^2}} (1+y+4z)\, dx \right) dydz,$$

$$\Rightarrow \iint_Y \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dS = 2\iint_D (1+y+4z)\sqrt{4-y^2-z^2}\, dydz = [\text{pol. koord.}] =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 (1+r\cos\varphi+4r\sin\varphi)\sqrt{4-r^2}\, r\, drd\varphi = 2\cdot 2\pi \int_0^2 r\sqrt{4-r^2}\, dr = 4\pi\left[-\tfrac{1}{3}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \underline{\frac{32\pi}{3}}.$$

b) Nu kan du använda Gauss direkt: ytan $Y: x^2+y^2+z^2=4$ är rand till klotet K med radien 2, alltså är $\iint_Y \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dS \underset{Gauss}{=} \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\, dxdydz = \iiint_K 2(1+y+4z)\, dxdydz$.

Fortsätt nu som ovan (då inser du direkt att du får ett dubbelt så stort flöde), eller räkna med rymdpolära koordinater:

$$\iiint_K 2(1+y+4z)\, dxdydz = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^2 (1+r\sin\theta\cos\varphi+4r\cos\theta) r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi =$$

$$=[\text{integrera först m.a.p. } \varphi] = 4\pi\int_0^{\pi}\int_0^2 \left(r^2\sin\theta + 2r^3\sin 2\theta\right) drd\theta = [\text{integrera nu m.a.p. } \theta] =$$

$$= 4\pi\cdot 2\int_0^2 r^2 dr = 8\pi\cdot\frac{8}{3} = \underline{\frac{64\pi}{3}}.$$

c) Räkna ut $rot\mathbb{F} = (2y-2y, 0-0, 2x-2x) = \vec{0}$, det ger att $\mathbb{F}$ är konservativt i $\mathbb{R}^3$.
En potential får vi genom att lösa diff-ekv. $grad\phi = \mathbb{F}$:

$$\begin{cases} \phi'_x = 2x+2xy \Rightarrow \underbrace{\phi(x,y,z) = x^2 + x^2y + \varphi(y,z)}_{\Downarrow} \\ \phi'_y = x^2+2yz \quad = \quad x^2 + \varphi'_y(y,z) \Rightarrow \underbrace{\varphi(y,z) = y^2z + g(z)}_{\Downarrow} \qquad \Rightarrow \underline{\phi(x,y,z) = x^2 + x^2y + y^2z + z^3} \\ \phi'_z = y^2+3z^2 \quad = \quad \varphi'_z(x,y) = y^2 + g'(z) \Rightarrow g(z) = z^3 \end{cases}$$

Därmed har vi naturligtvis än en gång visat att $\mathbb{F}$ är konservativt.

d) Kurvintegralen är då enligt c) ("arbete = potentialskillnad"):
$\int_C \mathbb{F} \bullet d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}(2)) - \phi(\mathbf{r}(1)) = \phi(5,3,3) - \phi(1,1,0) = \underline{152}$.

REPETITIONSFRÅGOR matem. metoder del D för E1, 2000

Moment 4: numeriska serier, potensserier, funktionsföljder och -serier

1. Vad är en serie? Hur definieras konvergens/divergens av en serie?
Obs: skilj noggrant mellan summa och serie.
2. Vad är en absolut konvergent serie? En betingat konvergent serie?
3. Hur kan du avgöra konvergens/divergens? (Konvergenskriterier: jämförelse-, majorant-, integral-, rot-, kvot-, Leibniz-, asymptotisk ekvivalens...).
4. Vad är punktvis resp. likformig konvergens av funktionsföljder (-serier)?
5. Varför är likformig konvergens så viktig?
6. Hur kan du visa likformig konvergens av en funktionsserie?
7. Vad gäller för potensserier? Vad är och hur beräknas konvergensradien för en sådan?

Extrauppgifter:

1. Man staplar tegelstenar på ett horisontellt underlag så att kortändan på varje tegelsten skjuter utanför kortändan på den sten, som ligger närmast under. Man har ett obegränsat antal tegelstenar till sitt förfogande. Hur långt kan man med bibehållen balans hos stapeln få den översta stenen att skjuta utanför den understa?

2. För vilka reella x konvergerar potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$?

Bestäm seriens summa för dessa x.

3. Beräkna $\lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x+k(k+1)}$.

svar: **1**. hur långt som helst **2**. $|x| \le 1$ **3**. 1