

VECKANS PROBLEM

PROBLEM 5 (lösningen skall vara klar to/fr 11/12 maj)

Funktionen f har perioden 2 och $f(t) = t + \cos ht$ för $-1 < t < 1$.

Utveckla f i Fourierserie på komplex form och på amplitud-fasvinkelform.

Lösningsförslag till VP4

a) a1) $\sqrt[n]{n^p 2^{-n}} = \frac{1}{2} \left(n^{\frac{1}{n}} \right)^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^p 2^{-n}$ är konvergent (kvotkrit. går lika bra)

a2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-p}}$ är konvergent $\Leftrightarrow 2-p > 1$ (huvudex.)

a3) $\sum_{n=1}^{\infty} (2p)^n$ är konvergent $\Leftrightarrow |2p| < 1$ (geom. serie)

a4) $\sqrt[n]{|n^p p^n|} = |p| \left(n^{\frac{1}{n}} \right)^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |p| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^p p^n$ är konvergent om $|p| < 1$ och

divergent om $|p| > 1$. För $p = -1$ fås den alternerande serien $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ som är

konvergent enligt Leibniz, ty $\frac{1}{n}$ går avtagande mot 0. $p = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent.

svar: a1) alla p a2) $p < 1$ a3) $|p| < \frac{1}{2}$ a4) $-1 \leq p < 1$

b) $\sqrt[k]{|a_k x^k|} = \sqrt[k]{\frac{\arctan k}{2^k \sqrt{k}}} |x| = \frac{\sqrt[k]{\arctan k}}{2 \sqrt[k]{k}} |x| \rightarrow \frac{|x|}{2}$ då $k \rightarrow \infty$ $\left(\sqrt[k]{\frac{\pi}{4}} \leq \sqrt[k]{\arctan k} < \sqrt[k]{\frac{\pi}{2}} \right)$; rotkrit. ger att

serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ är konvergent för $|x| < 2$ och divergent för $|x| > 2$. För $x = -2$ fås den alter-

nerande serien $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\arctan k}{k}$ som är konvergent enligt Leibniz, ty $\frac{\arctan k}{k}$ går avtagande

mot 0: sätt $f(x) = \frac{\arctan x}{\sqrt{x}}$: $f'(x) = \dots = \frac{x^2 \left(\frac{2}{x} - \arctan x \right) - \arctan x}{2x\sqrt{x}(1+x^2)} < 0$ då $x > 3 \dots$ För $x = 2$

fås serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{k}$ som är divergent ty $\frac{\arctan k}{k} \sim \frac{\pi}{2k}$ och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{2k}$ är divergent.

svar: $-2 \leq x < 2$

REPETITIONSFRÅGOR matem. metoder del D för E1, 2000

Moment 5: Fourierserier

1. Vad är en T-periodisk funktion? Vad är Fourierkoefficienterna till en sådan funktion?
2. Vad är Fourierserien på cosinus-sinus-form, på amplitudfasvinkelform, på komplex form? Sambandet?
3. Kan du (visa, tolka) Parsevals formel?
4. **Viktigt:** Lär dig räkna med θ !

Extrauppgift:

Funktionen f är udda, har perioden 4 och $f(t) = (1-t)\theta(1-t)$ för $t \in (0,2)$.

Utveckla f i Fourierserie och visa att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} \right)^2$

(alltså att $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$).

$$\text{svar: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\pi - 4 \sin \frac{k\pi}{2}}{(k\pi)^2} \sin \frac{k\pi}{2} t$$

Tenta 96-08-26, uppg. 2, lösning:

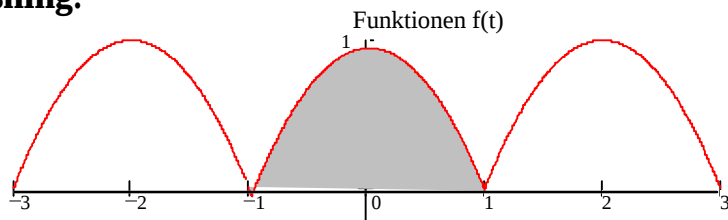
$\Omega = \pi$, koefficienterna är

$$c_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-jk\pi t} dt =$$

$= [f \text{ är jämn !}] =$

$$= \int_0^1 (1-t^2) \cos k\pi t dt = [\text{p.i., för } k \neq 0] = \left[\frac{(1-t^2) \sin k\pi t}{k\pi} - \frac{2t \cos k\pi t}{k^2 \pi^2} + \frac{2 \sin k\pi t}{k^3 \pi^3} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{-2(-1)^k}{k^2 \pi^2}, \quad c_0 = \int_0^1 (1-t^2) dt = \frac{2}{3} \Rightarrow f(t) = \frac{2}{3} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k^2 \pi^2} e^{jk\pi t}.$$



På sinus-cosinus-form är $f(t) = \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{k^2 \pi^2} \cos k\pi t$, alltså är

$$f(0) = 1 = \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{k^2 \pi^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{och} \quad f(1) = 0 = \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2 \pi^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\text{Parseval ger } \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-t^2)^2 dt = \int_0^1 (1+t^4-2t^2) dt = \frac{8}{15} = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{k^4 \pi^4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$