VECKANS PROBLEM

Lösningsförslag till VP5

$T=2 \Rightarrow \Omega=\pi$ och Fourierkoefficienterna till f är

$$c_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(t+\frac{1}{2}\left(e^{t}+e^{-t}\right)\right)e^{-jn\pi t}dt \underset{n\neq 0}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{jn\pi}te^{-jn\pi t}+\frac{1}{n^2\pi^2}e^{-jn\pi t}+\frac{e^{(1-jn\pi)t}}{2(1-jn\pi)}-\frac{e^{-(1+jn\pi)t}}{2(1+jn\pi)}\right]_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{(-1)^n j}{n\pi}+\frac{(-1)^n\left(e^{1}-e^{-1}\right)}{2}\left(\frac{1}{1-jn\pi}+\frac{1}{1+jn\pi}\right)=\frac{(-1)^n \sinh 1}{1+n^2\pi^2}+\frac{(-1)^n}{n\pi}j,\quad c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t+\cosh t)dt=\sinh 1.$$

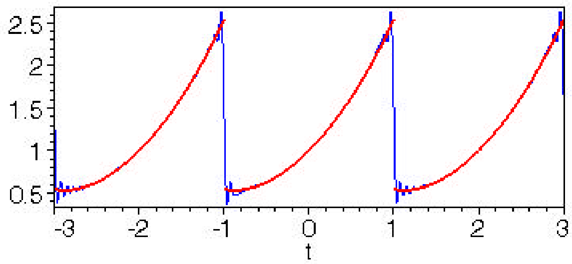
Amplitudfasvinkelformen fås med $A_0=c_0$ och för $n\geq 1$

$$A_n=2|c_n|=2\sqrt{\frac{\sinh^2 1}{\left(1+n^2\pi^2\right)^2}+\frac{1}{n^2\pi^2}},\quad \alpha_n=\arg c_n=\begin{cases}\arctan\frac{1+n^2\pi^2}{n\pi\sinh 1}, \text{ då } n=2k\\ \pi+\arctan\frac{1+n^2\pi^2}{n\pi\sinh 1}, \text{ då } n=2k+1\end{cases}.$$

svar:

$$\boxed{\begin{aligned} f(t)&=\sinh 1+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sinh 1}{1+n^2\pi^2}+\frac{j}{n\pi}\right)e^{jn\pi t}=\\ &=\sinh 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{(n\pi\sinh 1)^2+\left(1+n^2\pi^2\right)^2}}{\left(1+n^2\pi^2\right)n\pi}\cos\left(n\pi t+\arctan\frac{1+n^2\pi^2}{n\pi\sinh 1}+\frac{\left(1-(-1)^n\right)\pi}{2}\right)\end{aligned}}$$

Funktionen f och dess Fourierserie (delsumman med 26 toner):



Lösning till tentauppgift 3 (96-08-26):

a) $\operatorname{div}\mathbb{F}=-2xy\sin\left(x^2+y^2+z^4\right)+2xze^{x^2+y^2+z^2}+2xy\sin\left(x^2+y^2+z^4\right)-2xze^{x^2+y^2+z^2}=0$,

alltså har $\mathbb{F}$ en vektorpotential.

b) Sök $\mathsf{A}=(0, p, q)$ så att $\operatorname{rot}\mathsf{A}=\left(q'_y-p'_z, -q'_x, p'_x\right)=\mathbb{F}$, dvs

$$\begin{cases} q'_y-p'_z=y\cos\left(x^2+y^2+z^4\right)+ze^{x^2+y^2+z^2}\\ \quad -q'_x=-x\cos\left(x^2+y^2+z^4\right)\\ \qquad p'_x=1-xe^{x^2+y^2+z^2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q(x,y,z)=\frac{1}{2}\sin\left(x^2+y^2+z^4\right)+u(y,z)\\ p(x,y,z)=x-\frac{1}{2}e^{x^2+y^2+z^2}+v(y,z)\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q'_y - p'_z = y\cos\left(x^2+y^2+z^4\right) + u'_y + ze^{x^2+y^2+z^2} - v'_z = y\cos\left(x^2+y^2+z^4\right) + ze^{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'_y - v'_z = 0\text{; välj } u = v \equiv 0\text{. Det ger oss då } \underline{\mathbf{A} = \left(0, x - \tfrac{1}{2}e^{x^2+y^2+z^2}, \tfrac{1}{2}\sin\left(x^2+y^2+z^4\right)\right)}.$$

c) Flödet är $F = \iint_S \mathbb{F} \bullet \mathbf{n}\, dS$ ($\mathbf{n}$ "uppåt").

c$_1$) <u>med Stokes' sats:</u> $F = \iint_S rot\,\mathbf{A} \bullet \mathbf{n} dS = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = \oint_{\partial S} (0dx + pdy + qdz) =$

$$= \left[\begin{vmatrix} z = 0 \Rightarrow dz = 0 \\ \partial S: x^2 + y^2 = 1, \text{moturs} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi,\ dy = \cos\varphi\, d\varphi \end{vmatrix}, 0 \xrightarrow{\varphi} 2\pi\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2\cos\varphi - e)\cos\varphi\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi - e\cos\varphi)\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\cdot 2\pi = \underline{\pi}\ .$$

c$_2$) <u>utan Stokes' sats:</u> Eftersom $\iint_{S\cup D} \mathbb{F} \bullet \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbb{F} \bullet \mathbf{n} dS + \iint_D \mathbb{F} \bullet (0,0,-1)\, dxdy = [\text{ Gauss !}] =$

$= \iiint_K div\mathbb{F}\, dxdydz = 0$ $[\partial K = S \cup D]$, så gäller $[\text{med } D: x^2 + y^2 \le 1]$:

$$F = \iint_S \mathbb{F} \bullet \mathbf{n} dS = -\iint_D \mathbb{F} \bullet (0,0,-1)\, dxdy = \iint_D \left(1 - xe^{x^2+y^2}\right) dxdy = \pi - \iint_D xe^{x^2+y^2} dxdy = \pi$$

(ty $\iint_D xe^{x^2+y^2} dxdy = [\text{pol.koord.}] = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 e^{r^2} \cos\varphi\, dr d\varphi = 0$).

<u>svar:</u> $\boxed{\mathbf{A} = \tfrac{1}{2}\left(0, 2x - e^{x^2+y^2+z^2}, \sin\left(x^2+y^2+z^4\right)\right),\ \text{flödet är } \pi}$

ytan i c)