Laboration N3. Dubbelintegraler.

Betrakta dubbelintegral $\iint_D f(x,y)dxdy$ över rektangeln D i planet:

där $D = \{0 \leq y \leq 1/2;\ 0 \leq x \leq \pi/2\}$;

och $f(x,y) = \sin(xy) \cdot x^2$.

Uppgifter:

a) Beräkna integralen analytiskt på papper.

b) Skriv ett program i Matlab för att beräkna den integralen numeriskt med att approximera funktionen under integralen med trappfunktioner.

För detta dela upp rektangeln D i flera små rektanglar $\Delta_{i,k}$. Indelningen måste vara flexibel, så att du kan lätt variera antalet rektanglar $\Delta_{i,k}$ och göra dem mindre eller större. Välj samtidigt en punkt (x_i, y_k) i varje rektangel $\Delta_{i,k}$ där du kommer att beräkna värdena av funktionen $f(x,y) = \sin(xy)x^2$ under integralen.

Skriv en loop i Matlab där insatser från varje liten rektangel adderas så småningom till summan $\sum_{i,k} f(x_i, y_k)Arean(\Delta_{i,k})$ som approximerar integralen.

$$\iint_D f(x,y)dxdy \approx \sum_{i,k} f(x_i, y_k)Arean(\Delta_{i,k})$$

c) Ange felet med att jämföra er approximation med exakta analystiska lösningen från punkt a) för olika indelningar av rektangeln D. Hur snabbt går felet mot noll när antalet rektanglar växer, t.ex två gånger längs en koordinataxel?

d) Jämför resultat i varianten då punkten (x_i, y_k) väljes i hörnet av liten rektangeln $\Delta_{i,k}$ med den varianten då (x_i, y_k) väljes i mittpunkten av $\Delta_{i,k}$.Vilken variant ger bättre precision?

Vid redovisning (alternativt i rapporten) en detaljärad analystisk beräkning av integralen måste visas.