Stencil N 12. Ytintegraler. Stokes sats. Gauss sats

Ytintegraler. Om en yta S är parametriserad av formler $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, där $(u,v) \in D$ i planet R^2, eller det samma $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ - på vektorform så beräknas ytintegral av f över arean av ytan S enilgt formeln:

$$\int_S f(x,y,z)dS = \int_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\, |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|\, dudv.$$

Här $r'_u \times \vec{r}'_v$ är kryssprodukt av partiella derivator av $r(u,v)$. Samma formel kan skrivas om som

$$\int_S f(x,y,z)dS = \int_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\, \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

där $E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \qquad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$

$F = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$

Om ytan S är en graf(funktionsyta): $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$ så blir formler lite enklare:

$$\int_S f(x,y,z)dS = \int_D f(x,y,z(x,y))\, \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

Beräkna följande ytintegraler:

1. $\displaystyle\int_S \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dS$

   Ytan är cylinder parametriserad av formler: $x = r\cos u$, $y = r\sin u$, $z = v$, $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le H$.

   Svar: $2\pi r\left(\sqrt{r^2+H^2} - r\right)$

2. $\displaystyle\int_S (x+y+z)dS$; där S är delen av planet $x+2y+4z = 4$ där $0 \le x$, $0 \le y$, $0 \le z$. **Svar :** $7\sqrt{21}/3$.

3. $\displaystyle\int_S (x+y+z)dS$; där S är delen av sfären $x^2+y^2+z^2 = 1$ där $0 \le z$. **Svar :** π.

4. $\displaystyle\int_S z\, dS$; där ytan S har namnet helikoiden och parametriseras av formler: $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$; $0 \le u \le a$; $0 \le v \le 2\pi$.

   Svar: $\pi^2[a\sqrt{1+a^2} + \ln(a + \sqrt{1+a^2})]$

   Flöde genom en yta. Om S är en parametriserad yta, så beräknas flödet av vektorfältet $\vec{F} = [P,Q,R]^T$ genom ytan S enilgt formeln:

   $\displaystyle\int_S N \cdot \vec{F}(x,y,z)dS = \int_D det \begin{bmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{bmatrix} dudv$. I fall vektorfälet siktar parallellt med z-axeln, $\vec{F} = [0,0,R]^T$ blir formeln enklare:

   $$\int_S N \cdot \vec{F}(x,y,z)dS = \int_S N_z R(x,y,z)dS = \int_D R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{d(x,y)}{d(u,v)}dudv$$

   Om ytan är en graf (funktionsyta) $z = z(x,y)$ och vektorfältet siktar parallelt med z-axeln, $\vec{F} = [0,0,R]^T$, så blir formeln för flödet ännu enklare:

   $$\int_S N \cdot \vec{F}(x,y,z)dS = \int_D R(x,y,z(x,y,)dxdy$$

   Beräkna flödet av vektorfält genom en yta:

5. Beräkna flödet $\displaystyle\int_S \vec{N} \cdot \vec{F}dS$ upp genom triangeln i planet $x + 4y + z = 4$, $0 \le x$, $0 \le y$, $0 \le z$ för vektorfältet $\vec{F} = [P,Q,R]^T$ med $P(x,y,z) = 2z - x$; $Q(x,y,z) = x + 2z$; $R(x,y,z) = 3z$.

   Svar : 128/3.

6. Beräkna flödet $\int_S \vec{N} \cdot \vec{F} dS$

   om $\vec{F} = [0, Q, 0]^T$ med $P = 0$, $Q(x, y, z) = y$, $R(x, y, z) = 0$ ut genom sfären $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

   Svar : $4\pi R^3/3$

7. Beräkna flödet $\int_S \vec{N} \cdot \vec{F} dS$

   om $\vec{F} = [P, 0, 0]^T$ med $P = x^2$, $Q(x, y, z) = 0$, $R(x, y, z) = 0$ ut genom sfären $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

   Svar : 0

Gauss sats. Transformera följande ytintegraler $\int_{\partial D} \vec{N} \cdot \vec{F} dS$ till volum integraler med hjälp av Gauss sats om $\vec{F} = [P, Q, R]^T$:

8. där $P = x^3$, $Q(x, y, z) = y^3$, $R(x, y, z) = z^3$. **Svar :** $\int \int \int_D (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$
9. där $P = yz$, $Q(x, y, z) = zx$, $R(x, y, z) = xy$. **Svar :** 0
10. där $\vec{F} = rot(\vec{G})$. **Svar :** 0

Beräkna flödet av vektorfält genom en yta med hjälp av Gauss sats: $\vec{N}$ här är en yttre normal till ∂D.

11. Beräkna flödet $\int_{\partial D} \vec{N} \cdot \vec{F} dS$ för vektorfältet $\vec{F} = [P, Q, R]^T$, där $P = x^2$, $Q(x, y, z) = y^2$, $R(x, y, z) = z^2$ och kroppen D är definierad av olikheterna $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$.

    Svar : $-(a + b + c)abs$

12. Beräkna flödet $\int_{\partial D} \vec{N} \cdot \vec{F} dS$ för vektorfältet $\vec{F} = [P, Q, R]^T$, där $P = x^3$, $Q(x, y, z) = y^3$, $R(x, y, z) = z^3$ och kroppen är D definierad av olikheterna $x + y + z \leq a$, $0 \leq x$, $0 \leq y$, $0 \leq z$.

    Svar : $3a^5/20$

13. Beräkna flödet $\int_{\partial D} \vec{N} \cdot \vec{F} dS$ för vektorfältet $\vec{F} = [P, Q, R]^T$; där $P = 5x + y$; $Q(x, y, z) = 0$; $R(x, y, z) = z$ och kroppen D är en kon definierad av olikheterna $x^2 + y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq 4$.

    Svar : $128\,\pi$

Beräkna kurvintegraler med hjälp av Stokes sats

14. $\int_\gamma ydx + zdy + xdz$, där γ är cirkeln som är snittet av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ med planet $x + y + z = 0$ genomlupen moturs om man tittar från positiva delen av x-axeln. **Svar :** $-\pi a^2 \sqrt{3}$

15. $\int_\gamma (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$,

    där γ är skruvlinjen: $x(t) = a\cos(t)$; $y(t) = a\sin(t)$; $z(t) = \frac{h}{2\pi}t$; $0 \leq t \leq 2\pi$.

    Tips: komplettera linjen med ett intervall mellan endpunkterna av γ: (a,0,0) och (a,0,h) och använd Stokes sats. **Svar :** $h^3/3$

16. $\int_\gamma (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$,

    där γ är triangeln i planet $x + y + z = 1$ som definieras av olikheter $0 \leq x$, $0 \leq y$, $0 \leq z$ och genomlupen medurs om man tittar ovanifrån. **Svar :** 4.

17. $\int_\gamma (x + z)dx + (x - y)dy + xdz$,

    där γ är ellips $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 1$, genomlupen medurs om man tittar ovanifrån. **Svar** : -πab