

#### Stencil 4. Gradient, riktningsderivata, tangentplan

I övningar 3410-3419 ange ekvationer för tangentplan till givna ytor i givna punkter.

- **3410.**  $z = 2x^2 - 4y^2$  i punkten  $(2, 1, 4)$ .
- **3411.**  $z = xy$  i punkten  $(1, 1, 1)$ .
- **3412.**  $z = \frac{x^3 - 3axy + y^3}{a^2}$  i punkten  $(a, a, -a)$ .
- **3413.**  $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$  i punkten  $(3, 4, -7)$ .
- **3414.**  $z = a \tan\left(\frac{x}{y}\right)$  i punkten  $(1, 1, \pi/4)$ .
- **3415.**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  i punkten  $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{b\sqrt{3}}{3}, \frac{c\sqrt{3}}{3}\right)$ .
- **3416.**  $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$  i punkten  $(1, 2, -1)$ .
- **3417.**  $3x^4 - 4y^3z + 4z^2xy - 4z^3x + 1 = 0$  i punkten  $(1, 1, 1)$ .
- **3418.**  $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$  i punkten  $(1, 1, 2)$ .
- **3419.**  $4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z$  i punkten  $(2, 3, 6)$ .
- **3420.** Visa att tangentplanet till ellipsoiden  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  i en godtycklig punkt  $M(x_0, y_0, z_0)$  har formen:  $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$ .
- **3421.** Ange dem tangentplan till ellipsoiden  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$  som är parallella till planet  $x - y + 2z = 0$ .
- **3422.** Ange det tangentplan till ellipsoiden  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  som skär likadana sträckor av positiva delar av koordinataxlarna.
- **3423.** Visa att ytor  $x + 2y - \ln z + 4 = 0$  och  $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$  tangerar varandra i punkten  $(2, -3, 1)$ .
- **3427.** Visa att ytor  $x^2 + y^2 + z^2 = ax$  och  $x^2 + y^2 + z^2 = by$  är vinkelräta.
- **3429.** Visa att alla tangentplan till ytan  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$  skär av axlarna sträckor med summan av längder lika med  $a$ .
- **3430.** För ytan  $z = xy$  ange ekvationen för det tangentplanet som är vinkelrät mot linjen  $\frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}$ .
- **3435.** Bestäm dem punkter på ytan  $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z = 12$  där tangentplan är parallellt med en av koordinataxlarna.
- **3455.**
  - 1) Bestäm riktningsderivatan av funktionen  $u = xy^2 + z^3 - xyz$  i punkten  $(1, 1, 2)$  i riktningen som utgår vinklar  $60^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  med  $x, y, z$ -axlarna.
  - 2) Bestäm riktningsderivatan av funktionen  $w = xyz$  i punkten  $A(5, 1, 2)$  i riktningen från den punkten till punkten  $B(9, 4, 14)$

#### FACIT

- 3410.  $8x - 8y - z = 4$ .
- 3411.  $x + y - z - 1 = 0$ .
- 3412.  $z + a = 0$ ;
- 3413.  $17x + 11y + 5z = 60$ .
- 3414.  $x - y + 2z - \pi/2 = 0$ .
- 3415.  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \sqrt{3}$
- 3416.  $x + 11y - 5z - 18 = 0$ .
- 3417.  $3x - 2y - 2z + 1 = 0$ .
- 3418.  $2x + y + 11z - 25 = 0$ .
- 3419.  $5x + 4y + z - 28 = 0$ .
- 3421.  $x - y + 2z = \sqrt{\frac{11}{2}}$ .
- 3422.  $x + y + z = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .
- 3430.  $2x + y - z = 2$
- 3435. till  $xy$  planet i  $(0, 3, 3)$  och  $(0, 3, -7)$ ; till  $yz$  planet i  $(5, 3, -2)$  och  $(-5, 3, -2)$ ; till  $xz$  planet i  $(0, -2, -2)$  och  $(0, 8, -2)$ .
- 3455. 1)  $5, 2) 98/13$