MATEMATIK	Datum: 2006-10-23	Tid: eftermiddag
Chalmers	Hjälpmedel: Förmelsamling följer med tentan	
A.Heintz	Telefonvakt:	Tel.: 0740-350646

Tenta Flervariabelanalys. TMA043. Lösningar.

1. **Gradient.** Ange ekvationen för tangentplanet till ytan
$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = x+y+z-4$ i punkten $(2;3;6)$. (3p)
Allmän formel:
$F'_x(x-x_0)+F'_y(y-y_0)+F'_z(z-z_0)=0$
$$\nabla F(x,y,z) = \nabla\left[\sqrt{x^2+y^2+z^2}-(x+y+z)\right] = \left[\begin{array}{c} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-1 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-1 \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-1 \end{array}\right]_{(x;y;z;)=(2;3;6)} =$$
$$\left[\begin{array}{c} \frac{2}{7}-1 \\ \frac{3}{7}-1 \\ \frac{6}{7}-1 \end{array}\right] = \frac{1}{7}\left[\begin{array}{c} -5 \\ -4 \\ -1 \end{array}\right]$$
Ekvationen för tangentplanet är: $5(x-2)+4(y-3)+1(z-6)=0$; eller efter multiplikation: $5x+4y+z=28$.

2. **Optimering**. Bestäm samtliga lokala extrempunkter och deras typ för funktionen.
$f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2+6xy-4z$.
Stationära punkter upfyller systemekvationer:
$\nabla F(x,y,z)=0$, eller i det fallet:
$$\nabla\left[x^3+y^2+z^2+6xy-4z\ \right]=0;\left\{\begin{array}{c} 6y+3x^2=0 \\ 6x+2y=0 \\ 2z-4=0 \end{array}\right. ;$$
$$\left\{\begin{array}{c} 2y+x^2=0 \\ y=-3x \\ z=2 \end{array}\right. ;\left\{\begin{array}{c} x^2-6x=0 \\ y=-3x \\ z=2 \end{array}\right. ;\left\{\begin{array}{c} x=0;\text{ eller } x=6 \\ y=0;\text{ eller } y=-18 \\ z=2 \end{array}\right.$$
Två sationära punkter: $C=(0,0,2)$ och $B=(6,-18,2)$. För att undersöka vilken typ har stationära punkter måste man betrakta matrisen A av andra partiella derivator i dessa punkter . $A=\left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc} 6x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$.
$$A(C)=\left[\begin{array}{ccc} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right];\ A(B)=\left[\begin{array}{ccc} 36 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$ (3p)
Sylvesters kriterium visar direkt att punkt C är en sadelpunkt och kvardatiska formen $h^T A(C)h$ är indefinit eftersom $A(C)_{11}=0$ och $\det A(C)\neq 0$; inget lokalt extremum finns i punkt C.
$A(B)_{11}>0$; $\det\left[\begin{array}{cc} 36 & 6 \\ 6 & 2 \end{array}\right]=36>0$; $\det(A(B))=72>0$.Kvadratiska formen $h^T A(B)h$ är positivt definit och punkten $B=(6;-18;2)$ är ett lokalt minimum.

3. **Upprepad integral**. Skriv om följande upprepad integral med att ändra ordningen i integrering. Rita integrationsområdet. Beräkna integralen.

$$\int_{-1}^{2} dy \int_{y^2}^{y+2} y^2 dx. \qquad (3p)$$

Integrationsområdet är begränsad av en "liggande" parabel $x = y^2$ och av linje $x = y + 2$. Skärningspunkter av linjerna är $(1, -1)$ och $(4, 2)$.

$$\int_{-1}^{2} dy \int_{y^2}^{y+2} y^2 dx = \int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y^2 dy + \int_{1}^{4} dx \int_{-2+x}^{\sqrt{x}} y^2 dy$$

$$\int_{-1}^{2} dy \int_{y^2}^{y+2} y^2 dx. = \int_{-1}^{2} y^2(y + 2 - y^2) dy = \int_{-1}^{2} \left(2y^2 + y^3 - y^4\right) dy =$$

$$\left(\frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}y^5\right)_{y=-1}^{2} = \frac{63}{20}$$

4. **Potential.** Visa att fältet $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ är konservativt i hela planet för $P(x, y) = (2x\cos y - y^2 \sin x)$ and $Q(x, y) = (2y\cos x - x^2 \sin y)$.

   Beräkna potential av $\vec{F}(x, y)$ (3p)

   $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -2x\sin y - 2y\sin x$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2y\sin x - 2x\cos y$. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ i hela planet. Detta medför att en potential finns också i hela planet.

   $U(x, y) = \displaystyle\int_{(0,0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$ längs någon lämplig vär mellan $(0, 0)$och (x, y) till exempel längs en bruten kurva som går mellan punkterna $(0, 0)$, $(x, 0)$, (x, y).

   $U(x, y) = \int_0^x (2t\cos 0 - 0^2 \sin t)dt + \int_0^y (2\tau\cos x - x^2 \sin\tau)d\tau = x^2 + x^2\cos y - x^2 + y^2\cos x = x^2\cos y + y^2\cos x$

5. **Variablebyte i dubbelintegral.**

   Betrakta integralen $\iint\limits_D (x + y)^4 dxdy$ över kvadrat D med hörn i punkterna: $(1, 0)$; $(0, 1)$; $(-1, 0)$; $(0, -1)$.

   Använd följande variabelbyte i integralen $u = x + y$, $v = x - y$.

   Ange Jacobideterminanten det $\frac{d(x,y)}{d(u,v)}$ till variabelbytet. Ange integrationsområdet i planet (u, v). Utgör beräkningen av integralen i nya variabler. (3p)

   Integrationsområdet i nya variabler (u, v) är $E = \{(u, v) : -1 \le u \le 1; -1 \le v \le 1\}$

   det $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \left[\det \frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right]^{-1}$. det $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2$; det $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{-1}{2}$

   $\iint\limits_D f(x, y)dxdv = \iint\limits_E f(x(u, v)), y(u, v))\frac{1}{2}dudv$

   $\iint\limits_D (x + y)^4 dxdy = \iint\limits_E u^4 \frac{1}{2} dudv = 2\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u^4 du = [u^5/5]\,|_{-1}^{1} = 2/5$

6. **Ytintegral.** Beräkna arean av den delen av paroboloiden

   $z = x^2 + y^2$ där $z \le 4$, $x > 0$, $y > 0$. (3p)

   Projektion D av paraboloiden på x-y planet är en kvart av cirkeln med radien 2 och centrum i origo som ligger i första kvadranten.

   $Arean = \displaystyle\iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2} dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dxdy =$(vi använder polära koordinater) $= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^2 \sqrt{1 + 4\,(x)^2 + 4\,(y)^2} r dr\right) d\varphi =$

$\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^2\sqrt{1+4r^2}rdr\right)d\varphi=(\pi/2)\,\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{1+4\lambda}d\lambda=\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{4}\,\frac{2}{3}(1+4\lambda)^{3/2}\Big|_{\lambda=0}^{4}=\frac{\pi}{16}\frac{2}{3}(17^{3/2}-1)=\frac{\pi}{24}(17^{3/2}-1).$

(Variablebyte i integralen: $\lambda=r^2; d\lambda=dr^2=\frac{1}{2}rdr$)

7. **Gauss' sats.** Beräkna flödet av vektorfältet $\vec{F}(x,y,z)$ ut ur kroppen K med hjälp av Gauss' sats. Kroppen K är cylindern $x^2+y^2\le R^2$; $0\le z\le H$.

   Fältet $\vec{F}(x,y,z)=[x^2y,-xy^2,z^2(x^2+y^2)]^T$.

   $div\left(\vec{F}(x,y,z)\right)=2xy-2xy+2z(x^2+y^2)=2z(x^2+y^2).$

   $\int\int_{\partial K}\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{N}dS=\iiint\limits_K 2z(x^2+y^2)dxdydz=\iint\limits_D\left(\int_0^H 2z(x^2+y^2)dz\right)dxdy=$

   $\iint\limits_D H^2(x^2+y^2)dxdy=H^2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r^2rdr\right)d\varphi=2\pi H^2\int_0^R r^3dr=2\pi H^2\frac{R^4}{4}=\frac{\pi H^2R^4}{2}$

   (3p)

8. **Stokes' sats.** Beräkna arbetet av vektorfältet $\vec{F}(x,y,z)=[(y^2-z^2),(z^2-x^2),(x^2-y^2)]$ längs kurvan γ med hjälp av Stokes' sats. Kurvan γ är snittet av planet $x+y+z=2$ och paraboloiden $x^2+y^2+z=3$. Kurvan γ är orienterad positivt med avseende på x-axeln. (3p)

   $\vec{N}=\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]^T .rot\left(\vec{F}(x,y,z)\right)=-2\,[y+z,x+z,x+y]^T;$

   $rot\left(\vec{F}(x,y,z)\right)\cdot\vec{N}=-\frac{4}{\sqrt{3}}(x+y+z)$.Observera att $x+y+z=2$ på planet.

   $$\int_\gamma\vec{F}d\vec{r}=\iint\limits_S rot\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{N}dS=\frac{-4}{\sqrt{3}}2\iint\limits_S dS=-\frac{8}{\sqrt{3}}Arean(S)$$

Med att betrakta systemekvationer $x^2+y^2+z=3$ och $x+y+z=2$ observerar att detta medför $(x-0.5)^2+(y-0.5)^2=3/2$. Detta medför att projektion D av S på x-y planet är en cirkel med centrum i $(0.5,0.5)$och radien $\sqrt{1.5}$och $Arean(D)=\frac{3}{2}\pi$.

$Arean(S)=Arean(D)\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$

$$\int_\gamma\vec{F}d\vec{r}=-12\pi$$

Maxpoäng: 24 ; **3:** 12 ; **4:** 17; **5:** 20.

De studenter som klarat gamla C kursen, men inte D kursen får lösa bara problem 6,7, och 8 här. I det fallet får de ett betyg för aktuella kursen som är mellanvärde av betyget för problem 6,7,8 och betyget de har för C kursen.