MATEMATIK	Datum: 2007-08-31	Tid: eftermiddag
Chalmers	Hjälpmedel: Förmelsamling följer med tentan	
A.Heintz	Telefonvakt: Jonas Hartwig	Tel.: 0762-721860

Lösningar till tenta i TMA043 Flervariabelanalys E2 / MAN200 Matematik med tillämpningar 2 .

1. **Gradient.** Ange ekvationen för tangentplanet och ange normalvektorn till ytan med ekvationen

$y + ln\left(\frac{x}{z}\right) - z = 0$ i punkten $(1;1;1)$. (3p)

$$\overrightarrow{N}(x,y,z) = \nabla\left(y + \log\left(\frac{x}{z}\right) - z\right) = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{x} \\ 1 \\ -\frac{1}{z} - 1 \end{array}\right]\Bigg|_{(x,y,z)=(1,1,1)} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -2 \end{array}\right]\Bigg|$$

Ekvationen till tangentplanet har formen: $N_x(x - x_0) + N_y(y - y_0) + N_z(z - z_0) = 0$ speciellt i vårt fall:

$(x - 1) + (y - 1) - 2(z - 1) = 0$

2. **Optimering**. Bestäm samtliga lokala stationära punkter och extrempunkter och deras typ för funktionen

$f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$. (3p)

Stationära punkter (x,y)uppfyller ekvationen $\nabla f(x,y) = 0$.

$$\nabla\left(e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)\right) = \left[\begin{array}{c} (16x - 6y)\,e^{2x+3y} + 2e^{2x+3y}\left(-6xy + 8x^2 + 3y^2\right) \\ (-6x + 6y)\,e^{2x+3y} + 3e^{2x+3y}\left(-6xy + 8x^2 + 3y^2\right) \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{c} 2\left(e^{2x+3y}\right)\left(8x - 3y - 6xy + 8x^2 + 3y^2\right) \\ 3\left(e^{2x+3y}\right)\left(2y - 2x - 6xy + 8x^2 + 3y^2\right) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right].$$

Detta medför att $8x - 3y = 2y - 2x = 0$ och då $y = 2x$. Om vi sätter in $y = 2x$ i den första av ekvationerna för stationära punkter, så får vi en andragradsekvation för x:

$8x - 6x - 12x^2 + 8x^2 + 12x^2 = 2x + 8x^2 = 0$ Den ar två rötter: $x = 0$, $x = -1/4$. Vi hittat på det viset

två stationära punkter till f: $(0,0)$, och $(-1/4, -1/2)$

Matris av andra derivator är

$A = \left[\begin{array}{c} f_{xx}f_{xy} \\ f_{xy}f_{yy} \end{array}\right]$ där

$f_{xx} = 16e^{2x+3y} + 4\,(16x - 6y)\,e^{2x+3y} + 4e^{2x+3y}\left(-6xy + 8x^2 + 3y^2\right)$

$f_{xy} = -6e^{2x+3y} + 2\,(-6x + 6y)\,e^{2x+3y} + 3\,(16x - 6y)\,e^{2x+3y} + 6e^{2x+3y}\left(-6xy + 8x^2 + 3y^2\right)$

$f_{yy} = 6e^{2x+3y} + 6\,(-6x + 6y)\,e^{2x+3y} + 9e^{2x+3y}\left(-6xy + 8x^2 + 3y^2\right)$

Efter förenkling får vi

$$A = \left[\begin{array}{cc} 4\left(e^{2x+3y}\right)\left(16x - 6y - 6xy + 8x^2 + 3y^2 + 4\right) & 6\left(e^{2x+3y}\right)\left(6x - y - 6xy + 8x^2 + 3y^2 - 1\right) \\ 6\left(e^{2x+3y}\right)\left(6x - y - 6xy + 8x^2 + 3y^2 - 1\right) & 3\left(e^{2x+3y}\right)\left(12y - 12x - 18xy + 24x^2 + 9y^2 + 2\right) \end{array}\right]$$

$A(0,0) = \left[\begin{array}{cc} 16 & -6 \\ -6 & 6 \end{array}\right]$. Motsvarande kvadratiskaformen är positivt definit, eftersom $16 > 0$,

$\det(A) = \det\left[\begin{array}{cc} 16 & -6 \\ -6 & 6 \end{array}\right]$=$60 > 0$. Stationära punkten $(0,0)$ är ett lokalt minimum.

$A(-1/4,-1/2) = \left(e^{-1/4+3/4}\right) \times$
$\left[\begin{array}{cc} 4\,(-16/4+6/2-6/4/2+8/16+3/4+4) & 6\,(-6/4+1/2-6/4/2+8/16+3/4-1) \\ 6\,(-6/4+1/2-6/8+8/16+3/4-1) & 3\,(-12/2+12/4-18/8+24/16+9/4+2) \end{array}\right] =$
$\left(e^{-1/4+3/4}\right) \left[\begin{array}{cc} 14 & -9 \\ -9 & \frac{3}{2} \end{array}\right]$
Sylvesters kriterium medför att motsvarande kvadratiskaformen är indefinit eftersom $14 > 0$, det $\left[\begin{array}{cc} 14 & -9 \\ -9 & \frac{3}{2} \end{array}\right] = -60 < 0$. Stationära punkten $(-1/4,-1/4)$ är en sadelpunkt.

3. **Upprepad integral**. Rita integrationsområdet. Skriv om följande upprepad integral med att ändra ordningen i integrering.

$$\int_0^2 dy \int_{\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{4-y^2}} F(x,y)dx.$$

Integrationsområdet ar en del av cirkelskivan med radien 2 och centrum i origo som ligger i första kvadranten. Dessutom tas bort en halvcirkelskiva med radien ett och centrum i punkten $(0,1)$.Figuren är begränsad av två cirkelbågar som framsälles av ekvationer: $y = \sqrt{4-x^2}$; $y = 1+\sqrt{1-x^2}$ (övre delen av cirkeln); $y = 1-\sqrt{1-x^2}$(undre delen av cirkeln); och sträckan $y = 0$ mellan $x = 0$ och $x = 2$. Detta medför: $\displaystyle\int_0^2 dy \int_{\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{4-y^2}} F(x,y)dx =$
$\displaystyle\int_0^1 dx \int_{1+\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} F(x,y)dxdy + \int_0^1 dx \int_0^{1-\sqrt{1-x^2}} F(x,y)dxdy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} F(x,y)dxdy =$
$\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} F(x,y)dxdy - \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} F(x,y)dxdy$ (annan möjlig form av svaret). (3p)

4. **Kurvintegral.** I varje punkt av ellipsen L med parametriseringen: $x = a\cos(t)$, $y = b\sin(t)$, $0 \le t < 2\pi$ verkar kraftefältet $\vec{F}(x,y)$ med komponener $F_x = -x$ och $F_y = -y$. Beräkna arbetet som kraftfältet $\vec{F}(x,y)$ utgör när vi går längs den övre halvan av ellipsen moturs.
$\displaystyle\int_L F_x dx + F_y dy = \int_0^{\pi} \left[-a\cos t(-a\sin t) - b\sin t b\cos t\right] dt = \int_0^{\pi} \left[\left(a^2-b^2\right)\sin t\cdot\cos t\right] dt =$
$\displaystyle 0.5(a^2-b^2)\int_0^{\pi} \sin(2t)dt = 0$ (3p)

5. **Variablebyte i dubbelintegral.**

Betrakta integralen $\iint\limits_D (x-y)^2 dxdy$ över fyrhörning D med hörn i punkterna: $(1,0)$; $(1,2)$; $(-1,0)$; $(-1,-2)$.

Använd följande variabelbyte i integralen $u = y-x$, $v = x$.

Ange Jacobideterminanten det $\frac{d(x,y)}{d(u,v)}$ till variabelbytet. Ange integrationsområdet i planet (u,v). Utgör beräkningen av integralen med hjälp av nya variablerna (u,v) . (3p)

$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \left(\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right)^{-1}$; $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]$; det $\left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right] = -1$; det $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} =$ det $\left(\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right)^{-1} =$ $\left(\det \frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right)^{-1} = -1$.

Integrationsområdet i (u,v) planet är rektangeln E: $-1 < u < 1$; $-1 < v < 1$.

$\iint\limits_D (x-y)^2 dxdy = \iint\limits_E u^2|-1|dudv = \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^1 u^2 du = 2\cdot\frac{u^3}{3}|_{-1}^1 = \frac{4}{3}$.

6. **Gauss' sats.** Beräkna flödet av vektorfältet $\vec{F}(x,y,z)$ ut från kroppen begränsad av ytan $z=\sqrt{x^2+y^2}$ och planet $z=a$, och villkor $x\geq 0$, $y\geq 0$, $a>0$ med hjälp av Gauss' sats.

Fältet $\vec{F}(x,y,z)=[(x^2+y),(y^2),(-2xz)]^T$.

Gauss' sats: $\int\limits_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{N}dS=\int_K div(\overrightarrow{F})dxdydz$, där S är ytan som begränsar kroppen K. Kroppen i vårt fall är en kvart av en kon med spetsen i origo med höjden a, med axeln längs z-axeln och radien av proektionen på (x,y) planet lika med a. Trippelintegralen som fås från Gauss satsen berknas som upprepad integral. Projektionen av konen p $x-y$planet är cirkelskivan med radien a. Fr en godtycklig punkt (x,y) i projektionen genomör vi integrering i z-led över intervallet $[\sqrt{x^2+y^2},a]$. Vi inför polära koordinater i (x,y) planet: $y=r\sin(\varphi)$ $x=r\cos(\varphi)$ för att integrera över projektionen.

$$div\begin{bmatrix}(x^2+y)\\(y^2)\\(-2xz)\end{bmatrix}=2x+2y-2x=2y.$$

$$\int\limits_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{N}dS=\int_K 2ydxdydz=\int_{\Pr(x,y)}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{a}2ydzdxdy=\int_0^{\pi/2}\int_0^a\int_r^a 2r\sin(\varphi)dzrdrd\varphi=$$
$$\int_0^{\pi/2}\int_0^a 2r\sin(\varphi)(a-r)\cdot rdrd\varphi=$$
$$\int_0^{\pi/2}2\sin(\varphi)d\varphi\int_0^a(ar^2-r^3)dr=-2\cos(\varphi)|_0^{\pi/2}\cdot\left(\frac{ar^3}{3}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^a=2a^4\frac{1}{12}=\frac{a^4}{6}\qquad\text{(3p)}$$

7. **Ytintegral.** Betrakta ytan som är grafen av funktionen $z(x,y)=x^2+y^2$. Beräkna arean av den delen av grafen där $\frac{3}{4}\leq z\leq 2$. (3p)

Proektionen av ytan på (x,y) planet är cirkelring med radier $r_1=\sqrt{\frac{3}{4}}$ och $r_2=\sqrt{2}$.

$$S=\int_{\Pr(x,y)}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy=\int_{\Pr(x,y)}\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}dxdy=$$
$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{1+(2r)^2}rdr=2\pi\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{1+(2r)^2}\frac{1}{8}2(2r)d(2r)=\frac{\pi}{4}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{1+(2r)^2}d(2r^2)=$$
$$\frac{\pi}{4}\frac{(1+(2r)^2)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{\sqrt{\frac{3}{4}}}^{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{6}\left((1+4\cdot 2)^{3/2}-\left(1+4\cdot\frac{3}{4}\right)^{3/2}\right)=\frac{\pi}{6}\left((9)^{3/2}-(4)^{3/2}\right)=$$
$$\frac{\pi}{6}(27-8)=\frac{\pi}{6}\cdot 19$$

8. **Stokes' sats.** Beräkna arbetet av vektorfältet $\vec{F}(x,y,z)=[x^2,-xy^2,z]$ längs randen γ av triangeln S i rummet med hörnpunkter $(2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,1)$ med hjälp av Stokes' sats.

Trianglen är orienterad så att normalen siktar in i första oktanten. (3p)

Stokes satsen: $\int_\gamma \vec{F}(x,y,z)d\overrightarrow{r}=\int_S rot\left(\vec{F}\right)\cdot\overrightarrow{N}\,dS$ där ytan S är begränsad av kurvan γ.

Normalen $\overrightarrow{N}$ till ytan S är orienterad efter skruvregeln beroende på i vilken riktning vi går längs kurvan γ.

$$rot \begin{bmatrix} x^2 \\ -xy^2 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -y^2 \end{bmatrix}.$$

Normalen till triangeln beräknas med hjälp av ekvationen $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$ för planet som skär sträckor $(2,2,1)$ från x,y,z - koordinataxlarna.

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\sqrt{0.5^2+0.5^2+1}} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\int_\gamma \vec{F}(x,y,z)d\overrightarrow{r} = \int_S rot\left(\vec{F}\right)\cdot\overrightarrow{N}\,dS = \int_S \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -y^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) dS =$$

$$\int_S -\frac{2}{\sqrt{6}} y^2 dS = \int_{\mathrm{Pr}} -y^2 dxdy.$$

Det sista gäller eftersom $dS = (N_z)^{-1}dxdy$ och $N_z = \frac{2}{\sqrt{6}}$ i det fallet. Projektionen av triangeln S på (x,y) - planet är triangeln med hörn i punkter $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$.Vi får:

$$\int_S rot\left(\vec{F}\right)\cdot\overrightarrow{N}\,dS = \int_{\mathrm{Pr}} -y^2 dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} -y^2 dy\right) dx = \int_0^2 \left(-\frac{y^3}{3}\Big|_{y=0}^{2-x}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^2 (2-x)^3 dx = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\left(2-x\right)^4\Big|_0^2\right) = -\frac{16}{3\cdot 4} = -\frac{4}{3}$$