MATEMATIK | Datum: | Tid: 8.45
Göteborgs Universitet | Hjälpmedel: Stencil med formler följer med tentan.
A.Heintz

Några typiska problem till tenta i Flervariabelanalys.

1. **Kedjeregeln.**

   Visa att funktionen .

   $z(x,y) = \ln(x^2+xy+y^2)$ uppfyller ekvationen $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2.$ **(2p)**

   Lösning.

   $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}$$
   $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x+2y}{x^2+xy+y^2}$$
   $$x\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2} + y\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2} = \frac{2x^2+2xy+2y^2}{x^2+xy+y^2} = 2$$

2. **Implicita funktioner.**

   Funktionen $y(x)$ definieras som implicit funktion med hjälp av ekvationen $1 + xy - \ln\left(e^{xy} + e^{-xy}\right) = 0$. Ange värden på x och y för vilka funktionen existerar.

   Beräkna $\dfrac{dy}{dx}$ **(3p)**

   Lösning

   Låt $F(x,y) = 1 + xy - \ln\left(e^{xy} + e^{-xy}\right)$

   $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$ om $F'_y \neq 0$. Det är också villkoret då den implicita funktionen $y = y(x)$ existerar.

   $$F'_x = \frac{2ye^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}, \quad F'_y = \frac{2xe^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}. \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{2ye^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}}{\dfrac{2xe^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}} = \frac{-y}{x} \qquad \text{för } x \neq 0.$$

3. **Optimering.**

   Bestäm minimum och maximum (om de finns) av funktionen

   $z(x,y) = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$ **(3p)**

   Lösning.

   $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 6 - 2x - y, \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -x - 2y$. Stationära punkter (x,y) uppfyller ekvationssystemet $6 - 2x - y = 0, \qquad -x - 2y = 0$. Lösningen är entydig och är $x_0 = 4$, $y = -2$. $(4,-2)$ är en stationär punkt till $z = z(x,y)$.

   $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2,$$
   $$\frac{\partial^2 z}{\partial x dy} = -1,$$

   Jacobi matrisen A_{ij} har $A_{11} = -2 < 0$ och $det A = 4 - 1 = 3 > 0$. Detta medför att funktionen $z = z(x,y)$ har ett lokalt maximum i punkten $(x_0, y_0) = (4,-2)$

4. **Upprepad integral.**

   Skriv om följande dubbelintegral med att ändra ordningen i integrering. Rita integrationsområdet.

$$\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 f(x,y)dy. \qquad \mathbf{(2p)}$$

Lösning.

Integrationsområdet är halvcirkeln $(x-1)^2+y^2 \leq 1$, $-1 \leq y \leq 0$.

$$\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 f(x,y)dy = \int_{-1}^0 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y).$$

5. **Variabelbyte.**

   Beräkna med hjälp av polära koordinater integralen $\int_K e^{x^2+y^2} dxdy$,

   där området K är definierat av olikheten $x^2+y^2 \leq R^2$. **(3p)**

   Lösning.

   $$\int_K e^{x^2+y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{r^2}\, r\, dr = 2\pi \frac{1}{2} \int_0^R e^{r^2}\, dr^2 = \pi(e^{R^2}-1),$$

6. **Kurvintegral.**

   Beskriv begreppet kurvintegral. Beräkna $\int_L 2xydx - x^2dy$ där L är den del av parabeln $x = 2y^2$ som genomlöpes från punkten $A=(0,0)$ till punkten $B=(2,1)$.

   (3p)

   Lösning. Om vi har en kurva L med ekvationen $(x(t), y(t))$

   $$\int_L 2xydx - x^2dy = \int_0^1 2(2y^2)\cdot y \cdot 4ydy - \int_0^1 4y^4dy = \int_0^1 (16y^4-4y^4)dy =$$

   $$\frac{12}{5}y^5\Big|_0^1 = \frac{12}{5}$$

7. **Potential.** Bestäm om fältet $\vec{F}(x,y) = (\cos(2y), -2x\sin 2y)$ är konservativt och i vilket område. Motivera ! Beräkna potentialen till $\vec{F}$ om den finns. **(3p)**

   Lösning.

   If we use the general form $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ för differential form så är $P(x,y) = \cos(2y)$ och $Q(x,y) = -2x\sin 2y$ här.

   $$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -2\sin(2y), \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -2\sin(2y)$$

   $$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, \qquad P \text{ och } Q \text{ är } C^1 \text{ funktioner i hela planet.}$$

   Detta medför att $\vec{F}(x,y)$ är konservativt. Potentialen kan beräknas med integräring längs en lämplig kurva.

   $U(x,y) = \int_0^x \cos 2ydx - \int_0^y 2\cdot 0 \sin 2ydy + C = x\cos 2y|_0^x + C = x\cos 2y + C$

8. **Volumberäkningar.** Beräkna volumen av kroppen definierad av olikheterna $z \leq 4-y^2$, $x^2 \leq 2y$, $z \geq 0$, $x \geq 0$. **(3p)**

   Lösning.

   Kroppen är den del av cylindern $z \leq 4-y^2$ parallell med x-axeln, som ligger i första oktanten. Denna är begränsad av planen $z=0$, $x=0$ och en annan cylinder som i sin tur är parallell med z - axeln och har formeln $x^2 = 2y$.

   Volumen kan beräknas som upprepad integral först med avseende på z längs intervallet $[0, 4-y^2]$ för alla (x,y) från projektionen Pr av kroppen K på (x,y) planet och sedan över projektionen Pr. Figuren Pr är tur begränsad av en parabel $y = x^2$ och räta linjer $x = 0$, och $y = 2$. Integral över Pr beräknas som upprepad integral. Integrationsområden för alla variabler blir: $0 < x < \sqrt{2}$, $0 < y < x^2/2$, $0 < z < 4 - y^2$.

$$Volum(K) = \int_K dxdydz = \int_{Pr} dxdy \int_0^{4-y^2} dz = \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{x^2/2} dy \int_0^{4-y^2} dz =$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{x^2/2} (4 - y^2) dy = \int_0^{\sqrt{2}} dx \left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{x^2/2} =$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \left(2x^2 - \frac{x^6}{24}\right) dx = 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{(24 \cdot 7)}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(4 - \frac{8}{8 \cdot 7}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{27}{7}\right) = \frac{9\sqrt{2}}{7}$$