

Carl-Henrik Fant  
Matematiska Vetenskaper  
Chalmers och GU  
tel. (arb) 772 35 57  
epost: carl-henrik.fant@chalmers.se

tma043 V1, Ht07 bild 1

## Flervariabelanalys E2, Ht07

tma043 V1, Ht07 bild 2

### Lärare:

Carl-Henrik Fant  
Magnus Goffeng

tma043 V1, Ht07 bild 3

### Kurslitteratur:

**Robert A. Adams** Calculus, A complete course, 6th edition

**Matlablitteratur:** Efter egen smak.

tma043 V1, Ht07 bild 4

### Kursens omfattning:

**Adams:** Kapitel 10.1, 10.5, 11.1-11.3, 12, 13.1-3, 13.6, 14.1-14.5, 15, 16.1, 16.3-5.

tma043 V1, Ht07 bild 5

### Innehåll:

De grundläggande begreppen inom matematisk flervariabelanalys  
Viktiga egenskaper hos funktioner, som kontinuitet och differentierbarhet  
bestämning av extremvärden  
optimering  
approximation av funktioner med Taylorutveckling  
Dubbel- och trippelintegraler  
kurvintegral, kurvtagentintegral, ytintegral, normalytintegral  
Greens formel samt Gauss' och Stokes satser

tma043 V1, Ht07 bild 6

**Syfte:**

Kursens syfte är att, tillsammans med övriga matematikkurser, ge en matematisk allmänbildning som är så användbar som möjligt i fortsatta studier och teknisk yrkesverksamhet. Kursen skall på ett logiskt och sammanhängande sätt ge sådana kunskaper i matematisk analys i flera variabler och numerisk analys som är nödvändiga för övriga kurser inom E-programmet.

tma043 V1, Ht07 bild 7

**Mål:**

Efter fullgjord kurs skall du kunna  
redogöra för innebörden hos den matematiska flervariabelanalysens grundläggande begrepp  
redogöra för sambanden mellan de olika begreppen  
kombinera kunskaper om olika begrepp i praktisk problemlösning  
utnyttja programspråket MATLAB för problemlösning.

tma043 V1, Ht07 bild 8

## Flervariabelanalys E2, Vecka 1 Ht07

**Omfattning och innehåll**

**10.1** Punkter och vektorer i  $\mathbb{R}^n$ , mängder i  $\mathbb{R}^n$ ,

**10.5** Andragskurvor och -ytor.

**10.2-4** Repetition efter behov

tma043 V1, Ht07 bild 9

**Omfattning och innehåll** forts.

**11.1** Vektorvärda funktioner, derivering

**11.2** Tillämpningar av derivatan

**11.3** Kurvlängd, parametrisering av kurvor.

tma043 V1, Ht07 bild 10

**Mål** Denna vecka skall du lära dig

förklara vad som menas med omgivning till en punkt i  $\mathbb{R}^n$

förklara vad som menas med inre punkt, yttre punkt och randpunkt till en mängd i  $\mathbb{R}^n$

förklara vad som menas med en öppen mängd, en sluten mängd, det inre och det yttre av en mängd i  $\mathbb{R}^n$

skissa de olika andragsgradsytorna och ange deras ekvationer

derivera vektorvärda funktioner av en variabel genom tillämpning av derivationsreglerna

bestämma parametrisering av vissa kurvor

beräkna längden av kurvor

tma043 V1, Ht07 bild 11

**Centrala begrepp:**

Avstånd – distance

Omgivning – neighbourhood

Öppen mängd – open set, öppet intervall, öppen cirkelskiva, öppen boll

Sluten mängd – closed set

Randpunkt – boundary point

Inre punkt – interior point, det inre av en mängd

Yttre punkt – exterior point, det yttre av en mängd

Adams 10.1, tma043 V1, Ht07 bild 12

**Definition:**

**Normen, längden** av en vektor  $\mathbf{v}$  är skalären  $\|\mathbf{v}\|$  som ges av:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

Notera att  $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ .

Detta är mycket användbart t.ex. då man vill bevisa att två längder är lika eftersom man då kan utnyttja räkneregler för skalärprodukt och slipper rot-tecknet.

Adams 10.1, tma043 V1, Ht07 bild 13

**Definition:**

Låt  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  vara vektorer i  $\mathbb{R}^n$ .

Avståndet mellan  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  betecknas  $\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  och ges av

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

Adams 10.1, tma043 V1, Ht07 bild 14

### Vektorvärd funktion av en variabel

Typexempel: Koordinaterna för en partikel som rör sig i ett koordinatsystem:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$

där  $t$  är tiden och  $(x, y, z)$  är punktens koordinater.

Ofta betecknas punktens koordinater med  $\mathbf{r}$ , där  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ .

Funktionen skrivs då  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ .

I boken betecknar  $\mathbf{i}$  vektorn  $(1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$  och  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ .

Då är  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ .

Adams 11.1, tma043 V1, Ht07 bild 15

Vektorvärda funktioner av en variabel deriveras koordinatvis:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \frac{d}{dt}(x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

Då  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  beskriver en partikelbana kallas  $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$  partikelns hastighet.

$v(t) = |\mathbf{v}(t)|$  kallas partikelns fart och  $\frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t)$  dess acceleration.

Adams 11.1, tma043 V1, Ht07 bild 16

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\lambda(t)\mathbf{u}(t)) = \lambda'(t)\mathbf{u}(t) + \lambda(t)\mathbf{u}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(\lambda(t))) = \lambda'(t)\mathbf{u}'(\lambda(t))$$

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\| = \frac{\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}'(t)}{\|\mathbf{u}(t)\|}$$

Adams 11.1, tma043 V1, Ht07 bild 17

### Kurvlängd

En kurva ges av en parametrisering  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$

Kurvans längd ges av integralen

$$s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

Adams 11.3, tma043 V1, Ht07 bild 18