Lösningsförslag TMA043 080829

1a) $z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1)$

b) $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 2u\left(f_1'(u^2+v^2, u^2-v^2) + f_2'(u^2+v^2, u^2-v^2)\right)$

$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 2v\left(f_1'(u^2+v^2, u^2-v^2) - f_2'(u^2+v^2, u^2-v^2)\right)$

c) $\mathbf{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$ $\quad \|\mathbf{r}'(t)\|^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2 = a^2+b^2$

$L = \int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$

d) $\nabla f(x,y) = (2x-2y, -2x)$ $\quad \nabla f(1,-1) = (4,-2)$ $\quad \mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2})$ $\quad \|\mathbf{v}\| = 1$

$f_{\mathbf{v}}'(1,-1) = \nabla f(1,-1)\bullet \mathbf{v} = 4\cdot\frac{1}{\sqrt2} + (-2)\cdot(-\frac{1}{\sqrt2}) = \frac{6}{\sqrt2} = 3\sqrt2$

e) $\iint_D (x+2y)\,dA = \int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=x}^{2x}(x+2y)\,dy\right)dx = \int_0^1\left[xy+y^2\right]_{y=x}^{2x}dx = \int_0^1 4x^2\,dx = \frac{4}{3}$

f) $\begin{cases} f_x'(x,y) = 24x^2 - 12xy \\ f_y'(x,y) = -6x^2 - 6y + 18 \end{cases}$ $\quad \nabla f(0,3) = (0,0)$ $\quad \nabla f(2,4) = (0,-30)$ $\quad \nabla f(1,2) = (0,0)$ $\quad \nabla f(-3,-6) = (0,0)$

$(0,3)$, $(1,2)$ och $(-3,-6)$ är stationära punkter.

$f''_{xx} = 48x - 12y = A \quad f''_{xy} = -12x = B \quad f''_{yy} = -6 = C$

	A	B	C	$AC-B^2$	
$(0,3)$	-36	0	-6	>0	lokalt maximum
$(1,2)$	24	-12	-6	<0	sadelpunkt
$(-3,-6)$	-72	36	-6	<0	sadelpunkt.

2. $P = axy + y^3 \quad Q = x^2 + bxy^2$

Potentialfält $\Leftrightarrow P_y' = Q_x' \Leftrightarrow ax + 3y^2 = 2x + by^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3\end{cases}$

$P = 2xy + y^3 \quad Q = x^2 + 3xy^2$

$(P,Q) = \nabla f \Leftrightarrow \begin{cases} f_x' = 2xy + y^3 \Rightarrow f(x,y) = x^2y + xy^3 + \varphi(y) \\ f_y' = x^2 + 3xy^2 \Rightarrow f(x,y) = x^2y + xy^3 + \psi(x)\end{cases}$

$\Rightarrow f(x,y) = x^2y + xy^3 + C$ där C är en konstant.

3. Sluten kurva, värt att testa om Greens formel ger förenkling

$P = 3x^4 + 2x^2y, \quad Q = -2xy^2 \qquad Q_x' - P_y' = -2y^2 - 2x^2 = -2(x^2+y^2)$

$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x' - P_y')\,dx\,dy = \iint_D -2(x^2+y^2)\,dx\,dy = \left\{\begin{matrix}\text{polär}\\ \text{subst}\end{matrix}\right\} =$

$\iint_E -2r^2\cdot r\,dr\,d\theta = -2\int_{r=0}^{1}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi} r^3\,d\theta\right)dr = -2\cdot 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = -\pi.$

Eftersom γ är randen av enhetscirkelskivan ett varv moturs.

TMA043 080829

4) Gauss divergenssats ger här

$\iint_Y (x^3, y^3, z^3) \cdot N\,dS = \iiint_D (3x^2+3y^2+3z^2)\,dxdydz$ där D är

sfären $x^2+y^2+z^2 \le 4$. Sfärisk substitution $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

$0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \qquad dxdydz = r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$

ger

$\iint_Y (x^3, y^3, z^3) \cdot N\,dS = \int_{r=0}^{2}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} 3r^2 \cdot r^2 \sin\theta\,drd\theta d\varphi = 3\cdot 2\pi\left[-\cos\theta\right]_0^\pi \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2$

$= 3\cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{2^5}{5} = \frac{3\cdot 2^7\pi}{5} = \frac{384\pi}{5} = 76.8\pi$

5) Ellipsen kan parametriseras med $x = 2\cos t,\ y = 4\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$

På ellipsen är $f(x,y) = 8\cdot 4\cos^2 t + 4\cdot 2\cos t \cdot 4\sin t = 16(2\cos^2 t + 2\cos t\sin t)$

$= 16(\cos 2t + 1 + \sin 2t) = 16(1+\sqrt{2}\sin(2t+\frac{\pi}{4}))$

Största värdet av f på ellipsen är $16(1+\sqrt{2})$ som erhålls i alla punkter där $\sin(2t+\frac{\pi}{4}) = 1$

Minsta värdet $16(1-\sqrt{2})$ erhålls där $\sin(2t+\frac{\pi}{4}) = -1$

($\sin(2t+\frac{\pi}{4}) = 1 \iff 2t+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + n2\pi \iff t = \frac{\pi}{8} + n\pi,\ n = 0, 1$

$\cos\frac{\pi}{4} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8} \implies \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$

$\cos\frac{\pi}{4} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 \implies \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$ ger de två punkterna där största värdet erhålls

$(2\cos\frac{\pi}{8}, 4\sin\frac{\pi}{8})$ och $(-2\cos\frac{\pi}{8}, -4\sin\frac{\pi}{8})$

$\sin(2t+\frac{\pi}{4}) = -1 \implies t = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n = 0, 1$ ger ~~de~~ två punkterna där minsta värdet antas

$(-2\sin\frac{\pi}{8}, 4\cos\frac{\pi}{8})$ och $(+2\sin\frac{\pi}{8}, -4\cos\frac{\pi}{8})$.

Punkterna behövde man inte bestämma.)

6) a) Falsk. Om C är enhetscirkeln så kan Greens formel inte tillämpas

b) Sann Om $\lim_{t\to 0}(x(t), y(t)) = (0,0)$ så är $\lim_{t\to 0} f(x(t), y(t)) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

c) Falsk f kan ha lokalt max i punkt där ∇f inte är definierad

d) Falsk ∇f är normal till nivåkurvan i xy-planet. $f(x,y) = C$ inte till ytan $f(x,y) = z$

e) Falsk Det ställs krav på f också

f) Falsk. Största värdet är $|\nabla f(a,b)|$

7. Se boken.