Matlabövning 3
Flervariabelanalys för E2 Ht 2007

Matematiska Vetenskaper
Carl-Henrik Fant

Numerisk beräkning av dubbelintegraler.

För att beräkna approximativa värden till enkelintegraler finns MATLAB's inbyggda funktion `quad`. Denna utnyttjas av `dblquad` för beräkning av dubbelintegraler över rektanglar med hjälp av upprepad integration. Det finns inte något särskilt program för beräkning av dubbelintegraler över allmännare områden i planet men denna svårighet går att eliminera.

Målet med övningarna nedan är att du skall bli förtrogen med `dblquad`, du skall få pröva en metod för beräkning av dubbelintegraler över allmännare områden samt få pröva en annan metod för beräkning av dubbelelintegraler. Det finns också en MATLABfunktion `triplequad` för beräknning av trippelintegraler, men den skall vi inte ta upp här.

Exempel 1: Vi skall beräkna dubbelintegralen $\int\int_D x^4 + y^2 dxdy$ då D är rektangeln $x_1 \leq x \leq x_2,\ y_1 \leq y \leq y_2$ med hjälp av `dblquad`.

Funktionen av två variabler som skall integreras måste då som vanligt vara definierad i en `funktionsfil` eller som anonym funktion med `@`.

```
fun = @(x,y) x.^4+y.^2;
```

Kommandot för integralberäkningen är nu
`I = dblquad(fun,x1,x2,y1,y2)` med lämpliga värden på `x1,x2,y1,y2` . □

Vid beräkning av dubbelintegraler över ett allmännare område D i planet kan vi utgå från bokens definition. Vi gör om funktionen så att den är noll utanför D och integrerar den nya funktionen över en rektangel som omfattar D. Detta gör vi med hjälp av områdets *karakteristiska funktion.*

Vi definierar då en funktion $kar_D(x,y)$ genom

$$kar_D(x,y) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{om} \quad (x,y) \in D \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \quad .$$

Exempel 2: Till $D = \{(x,y)\colon 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$, definierar vi karakteristiska funktionen $kar_D(x,y)$:

```
karD = @(x,y) (0 <= x).*(x <= 2).*(0 <= y).*(y <= x.^2);
```

Kontrollera funktionen genom att rita funktionsytan och se hur området ser ut.

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-1,5,100));
z=karD(x,y); mesh(x,y,z)
```

(Anmärkning: Det naturliga att använda ovan är `&` mellan de olika olikheterna som tillsammans ger D. Jag har använt `.*` . Det är möjligt att `&` fungerar men inte när jag testkör. Om `x` och `y` är matriser genererade av `meshgrid` så uppfattas ändå matrisen `karD(x,y)` som ett otillåtet objekt i `mesh` . Däremot fungerar `karD(x,y)*2/2`. Med `.*` så blir det en "riktig" matris.)
□

För att beräkna integralen av funktionen $z = x^4 + y^2$ över området D skall vi sedan ändra funktionen i integralen till:

```
funD=@(x,y) fun(x,y).*karD(x,y);
```

Eftersom rektangeln $0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 4$ omfattar D så beräknas integralen slutligen med

```
I = dblquad('funD',0,2,0,4)
```

Uppgift 1:

a. Lös uppgift 14.2.7 ur Adams. Jämför med facit.

b. Lös uppgift 14.2.11 ur Adams. Jämför med facit.

c. Beräkna $\iint_D e^{x^2-y^2}\,dxdy$, där $D = \{(x,y)\colon 1 \leq x \leq 2, |xy| \leq 1\}$. (Kom ihåg! e^x skrivs i Matlab `exp(x)` inte `e.^x`.))

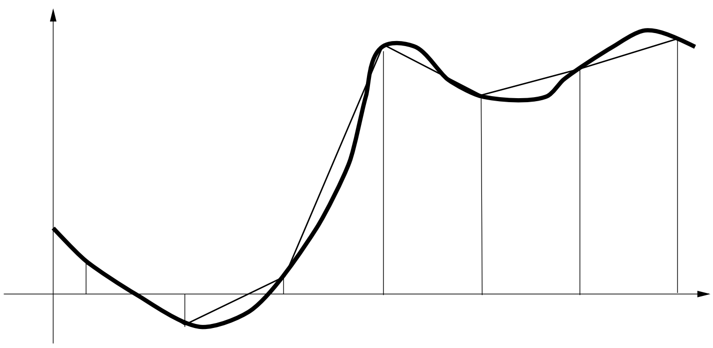
$\square$

Monte Carlo-metoden för numerisk beräkning av flerdimensionella integraler

Med tack till Tommy Gustafsson.

Syftet med den här delen av övningen är att demonstrera hur man kan beräkna flerdimensionella integraler approximativt med den så kallade *Monte Carlo-metoden*. Vi kommer inte att göra någon matematisk analys av hur effektiv och noggrann metoden är, eftersom detta inte är lätt att göra utan att först läsa en kurs i matematisk statistik.

De vanligaste metoderna för att beräkna endimensionella bestämda integraler med hjälp av dator, går ut på att man delar in integrationsområdet i små intervall, och sedan approximerar man integranden med ett polynom i vart och ett av intervallen.



I figuren ovan visas trapetsmetoden, som innebär att man approximerar integranden på varje intervall med en linjär funktion. Man kan göra samma sak med en två- eller tredimensionell integral: då delar man in integationsområdet t.ex. i trianglar (tetraedrar), och sedan approximeras integranden med den linjära funktion som har rätt värden i triangelns (tetraederns) hörnpunkter. Man kan också välja att approximera integranden med polynom av högre ordning. Jämfört med det endimensionella fallet finns det åtminstone två problem med detta. Det första är att om inte området har speciell form, så kan det inte delas in exakt i trianglar eller tetraedrar. Det andra är, att om man vill öka noggrannheten genom att minska delområdenas storlek, så ger en åttadubbling av antalet tetraedrar respektive en fyrdubbling av antalet trianglar samma noggrannhetsförbättring som en fördubbling av antalet intervall i det endimensionella fallet. Ibland kan man behöva beräkna integraler i mycket högre dimension än tre, och då går det åt $2^{\text{dimension}}$ gånger så många delområden för att motsvara en fördubbling av antalet delintervall. Även med nutidens datorer kan det bli orimligt mycket räknearbete för en given noggrannhet.

En enkel metod som kan vara en lösning på båda problemen är den så kallade *Monte Carlo-metoden*. Vi skall först se hur den kan användas till att beräkna arean av områden i planet. Området Ω i figuren överst på följande sida är inritat i en ruta som är 1×1 areaenheter (ae). Antag att området har arean

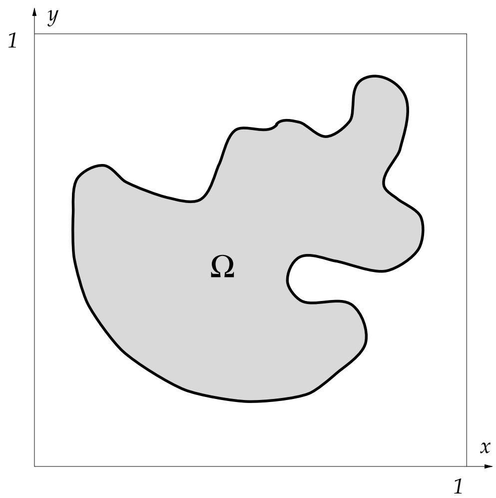
$A < 1$ (ae). Om man väljer två koordinater $0 \leq x \leq 1$ och $0 \leq y \leq 1$ slumpvis, så är sannolikheten att punkten (x, y) ligger i området Ω precis A (man måste ställa en del krav på hur området ser ut, för att detta påstående skall vara sant). Om man nu väljer N punkter, (x_i, y_i), $1 \leq i \leq N$, så borde i genomsnitt $A \times N$ av punkterna ligga inom det markerade området. Detta är idén bakom Monte Carlo-metoden:

a. Välj N punkter (x_i, y_i) slumpvis i rutan $\{(x, y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

b. Undersök hur många av de N punkterna som ligger i område Ω. Kalla detta antal för M.

c. Tag $A \approx M/N$ som en approximation av områdets area.

Man kan visa att beräkningsfelet med denna metod i snitt avtar som $1/\sqrt{N}$. Man måste ställa vissa villkor på området för att detta skall stämma, men för de flesta områden man kan tänkas komma på, så är det sant.



Man kan också beskriva metoden på ett något annorlunda sätt, som passar bättre för att beräkna tvådimensionella integraler. Vi utnyttjar områdets *karaktäristisk funktion* Om man har valt de N punkterna slumpvis som tidigare blir nu

$$A \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} kar_{\Omega}(x_i, y_i)\,.$$

Här har vi egentligen sagt att arean av ett område är precis samma sak som integralen av funktionen som är konstant lika med ett över hela området. Om man istället vill beräkna en dubbelintegral,

$$I = \iint_{\Omega} f(x, y)\, dxdy\,,$$

så gör man precis på samma sätt, fast nu blir

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} kar_{\Omega}(x_i, y_i) f(x_i, y_i)\,.$$

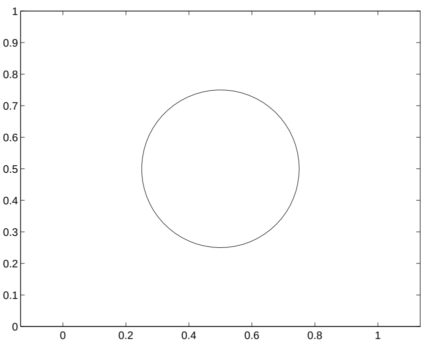
Som metoden är beskriven här, fungerar den bara om området Ω är ändligt (man kan förstås göra en större ruta än 1×1 om det behövs), och om funktionen $f(x, y)$ är begränsad, men det finns trick för att lösa de fall där dessa krav inte är uppfyllda.

Uppgift 2: I figuren nedan ges området Λ av

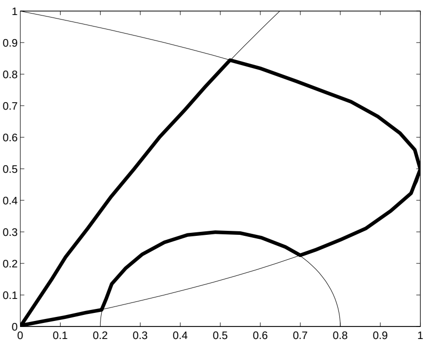
$$\Lambda \;=\; \{(x,y); (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 < 1/16\}\,,$$

och Γ består av det område som definieras av olikheterna

$$\begin{aligned} y - 2\ln(1+x) &< 0\,, \\ x + 4(y-1/2)^2 &< 1\,, \quad \text{och} \\ (x-1/2)^2 + y^2 &> 0.09\,. \end{aligned}$$



Området Λ.



Området Γ.

a. Använd Monte Carlo-metoden för att beräkna arean av området Λ och för att beräkna integralen,

$$\iint_\Lambda (x^2+y^2)\,dxdy\,.$$

Testa med antal punkter $N = 10, 100, 1000, 10000$, och utför varje test femton gånger. MATLAB-kommandot `rand` ger likformigt fördelade tal i intervallet $(0,1)$. Med kommandot `x = rand(10,1)` får man en 10×1-matris med slumptal mellan 0 och 1, med kommandot `x = a+ b*rand(10,1)` får man en 10×1-matris med slumptal mellan a och $a+b$. Gör motsvarande för `y` så får du matriser som kan användas för att beräkna värden för karakteristiska funktionen. Arean av det område som täcks av punkterna beror naturligtvis på faktorerna framför `rand`. Studera hur de värden du erhåller varierar från gång till gång då N hålls fixt. Beräkna till sist det exakta värdet på arean respektive integralen och jämför med de numeriska resultaten. Åskådliggör m.h.a. MATLAB dina slutsatser. Visa att variationen kring de exakta värdena minskar med ökande N.

b. Beräkna arean av området Γ respektive integralen

$$\iint_\Gamma (x^2+y^2)\,dxdy\,.$$

Genomför samma ”tester” som i uppgift 1. Jämför med det `dblquad` ger.

$\square$