

TMA043 Flervariabelanalys E2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 08/09 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida 11/1. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar.

2. Låt $\mathbf{F} = e^y \mathbf{i} + xe^y \mathbf{j} + \mathbf{k}$

(a) Undersök om kraftfältet \mathbf{F} är källfritt och/eller virvelfritt i \mathbb{R}^3 (2p)

(b) Har kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ samma värde för alla styckvis glatta kurvor C med begynnelsepunkt i $(-1, 0, 0)$ och slutpunkt i $(1, 0, 0)$? (motivera ditt svar) (1p)

(c) Beräkna det arbete som kraftfältet \mathbf{F} utför på en partikel som rör sig längs cirkelbågen $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$ i xy -planet (dvs där $z = 0$), från $(-1, 0, 0)$ till $(1, 0, 0)$ (3p)

3. Sambandet mellan de Cartesiska koordinaterna x, y, z och de sfäriska koordinaterna r, ϕ, θ

$$\text{ges av } \begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases}$$

(a) Uttryck området $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$ i de sfäriska koordinaterna (2p)

(b) Beräkna massan av den kropp som definieras av Ω då densiteten ges av $\rho(x, y, z) = z$ (4p)

4. (a) Förklara vad som menas med begreppen *kritisk punkt* respektive *lokalt minimum*. (2p)

(b) Finn och klassificera de kritiska punkterna till $f(x, y) = x^2 y - x \ln y$ (4p)

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (4p)

(a) Om $D_{\mathbf{v}} f(a, b) = 0$ för alla enhetsvektorer \mathbf{v} så är (a, b) en kritisk punkt till $f(x, y)$

(b) Alla kontinuerliga funktioner är också differentierbara

(c) Integralen $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$, där $D : x^2 + y^2 \leq 1$, är konvergent

(d) Funktionen $f(x, y) = x \arctan(y) + y \sin x$ har ett största värde på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ (dvs. maximum av $f(x, y)$, under bivillkoret $x^2 + y^2 = 1$, existerar)

Del 2: Överbetygsdelen

Uppgifterna i denna del rättas och bedöms endast om den första delen är godkänd.

6. Bestäm det största och minsta värdet av funktionen $f(x, y, z) = x$ på skärningen mellan planet $z = x + y$ och ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8$ (6p)
7. Beräkna det totala flödet av hastighetsfältet $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ genom den del av konen $z^2 = x^2 + y^2$ där $0 \leq z \leq 2$, i riktning in mot z -axeln, genom att (6p)
- (a) använda definitionen av ytintegral (du behöver då bl.a. parametrisera ytan och bestämma normalvektorer i varje punkt på ytan)
 - (b) tillämpa Gauss divergens sats på lämplig sluten yta
8. Välj **en** av följande två deluppgifter (om det i dina lösningarna finns något redovisat från båda deluppgifterna så granskas endast den först redovisade). (6p)
- (a) Formulera och bevisa kedjeregeln för sammansatta funktioner av typen $f \circ g$ där $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ och $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 - (b) Formulera Greens formel och bevisa den för områden som är både x -enkla och y -enkla.

Lycka till!
Carl-Henrik F

Anonym kod	TMA043 Flervariabelanalys E, 090110	sid.nummer	Poäng
------------	-------------------------------------	------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 i punkten $(0, 0)$ till funktionen $f(x, y) = \frac{1+x}{1+y}$ (2p)

Lösning:

Svar:

- (b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan $xe^y + ye^z - xz = 1$ i punkten $(1, 0, 0)$. (2p)

Lösning:

Svar:

- (c) Låt f vara en funktion av två variabler som är sådan att $f_1(3, 5) = 4$ och $f_2(3, 5) = 3$. Beräkna $h_2(2, 1)$ då $h(x, y) = f(2x - y, x + 3y)$. (2p)

Lösning:

Svar:

- (d) Låt C vara skärningskurvan mellan planet $z = \sqrt{3}x$ och cylindern $y^2 = x^3$. Beräkna längden av den del av kurvan som ligger mellan origo och punkten $(1, 1, \sqrt{3})$ (2p)

Lösning:

Svar:

- (e) Använd Greens formel för att beräkna kurvintegralen $\oint_C e^{xy} dy$, där C är randen till det rektangulära området $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$, orienterad moturs. (2p)

Lösning:

Svar:

Formelblad för MVE085 08/09

Trigonometri.

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos 2x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin 2x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+ax} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = I_n$$

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + x^{n+1}B(x) \quad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + x^{n+1}B(x) \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{2k-1} + x^{2n+1}B(x) \quad |x| \leq 1$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\dots 1} \quad \binom{\alpha}{0} = 1$$

Övrigt

Tyngdpunkten (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz}$, analogt för y_T, z_T .

$\rho(x, y, z)$ är densiteten.