MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 090828 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen Telefonvakt: David Heintz
Telefon: 0762-721861

MVE085 Flervariabelanalys V2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 08/09 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.** (14p)

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

2. (a) Skissa i xy-planet på den kurva $\mathcal{C}$ som ges av parametriseringen (1p)

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^2 - 1 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

(b) Visa att vektorfältet $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (x+1)\mathbf{j}$ är konservativt i $\mathbb{R}^2$ och bestäm en potential till $\mathbf{F}$ (3p)

(c) Beräkna det arbete $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ som kraftfältet $\mathbf{F}$ i deluppgift (b) utför på en partikel som rör sig längs kurvan i deluppgift (a) från $(1,-1)$ till $(2,0)$ (2p)

3. (a) Vilken typ av andragradsyta beskrivs av parametriseringen (1p)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = r^2 \end{cases}, \quad r \geq 0\ ,\ 0 \leq \theta < 2\pi$$

(b) Avgör om hastighetsfältet $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (y-x)\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$ är virvelfritt och/eller källfritt i $\mathbb{R}^3$ (2p)

(c) Beräkna flödet $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} dS$ av hastighetsfältet i deluppgift (b) nedåt (dvs. i negativ z-led) genom den del $\mathcal{S}$ av ytan i deluppgift (a) där $0 \leq r \leq 1$ (3p)

4. Finn och klassificera de kritiska punkterna till funktionen $f(x,y) = xy\, e^{-(x^2+y^2)/2}$ (6p)

Överbetygsdelen finns på baksidan av detta blad

Del 2: Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Visa att ekvationen $\cos(x - y + z) = y \ln x + z$ implicit definierar en funktion $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten (1,2,1). Bestäm sedan Taylorpolynomet av första ordningen till $f(x, y)$ i punkten $(1, 2)$. (6p)

6. Avgör om följande ekvationssytem har någon lösning; (6p)

$$\begin{cases} x^3 + 3x + y^3 + 3y = 4 \\ 2x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

(Tips: undersök största och minsta värde av funktionen $x^3 + 3x + y^3 + 3y$ under bivillkoret $2x^2 + 2y^2 = 1$)

7. Visa att följande identiteter gäller för alla glatta vektorfält $\mathbf{F} = \mathbf{i}F_1 + \mathbf{j}F_2 + \mathbf{k}F_3$ och funktioner $\phi(x, y, z)$ (som vanligt är ∇ nablaoperatorn $\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ och symbolerna $\bullet$ och $\times$ betecknar skalärprodukt resp. vektorprodukt). (6p)

(a) $\nabla\bullet(\nabla\times\mathbf{F}) = 0$

(b) $\nabla\times(\nabla\phi) = \mathbf{0}$

Anonym kod	**MVE085 Flervariabelanalys V2 090828**	sid.nummer **1**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm gradienten till funktionen $f(x,y) = xy^2$ i punkten $\mathbf{p} = (2,5)$. Bestäm också riktningsderivatan av funktionen f i punkten $\mathbf{p}$ och i riktningen $\mathbf{v} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Uttryck $\dfrac{\partial}{\partial x} f(2x+y, xy)$ och $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f(2x+y, xy)$ i de partiella derivatorna av f (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm differentialen df av funktionen $f(x,y) = \sin(2x - y)$ i punkten $(1,2)$ och använd differentialen för att beräkna $f(1.1, 1.9)$ approximativt. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna den generaliserade dubbelintegralen $\displaystyle\iint_T \frac{y}{\sqrt{x}}\, dxdy$, där T är triangelområdet med hörn i $(0,0), (0,1)$ och $(1,1)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Beräkna volymen av området Ω som beskrivas av olikheterna $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$ och $x^2+y^2+z^2 \leq 4$, genom att beräkna $\iiint_\Omega dxdydz$ med hjälp av sfärisk substition. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Formelblad för TMA043 och MVE085 08/09

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos2x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin2x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{x2+a2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x2+a}} dx = \ln|x+\sqrt{x2+a}| + C \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x2+a} + a\ln|x+\sqrt{x2+a}|) + C$$

$$\int \frac{1}{(x2+1)^n} dx = I_n$$

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} x^k + x^{n+1}B(x) \qquad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + x^{n+1}B(x) \qquad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + x^{2n+1}B(x) \qquad |x| \leq 1$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\ldots 1} \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Övrigt

Tyngdpunkten (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.