Carl-Henrik Fant
Matematiska Vetenskaper
Chalmers och GU
tel. (arb) 772 35 57
epost: carl-henrik.fant@chalmers.se

tma043 V1, Ht08 bild 1

Flervariabelanalys E2, Ht08

tma043 V1, Ht08 bild 2

Lärare:
Carl-Henrik Fant
Magnus Goffeng

tma043 V1, Ht08 bild 3

Kurslitteratur:
Robert A. Adams Calculus, A complete course, 6th edition
Matlablitteratur: Efter egen smak.

tma043 V1, Ht08 bild 4

Kursens omfattning:
Adams: Kapitel 10.1, 10.5, 11.1-11.3, 12, 13.1-3, 13.6, 14.1-14.6, 15, 16.1, 16.3-5.

tma043 V1, Ht08 bild 5

Innehåll:
De grundläggande begreppen inom matematisk flervariabelanalys
Viktiga egenskaper hos funktioner, som kontinuitet och differentierbarhet
bestämning av extremvärden
optimering
approximation av funktioner med Taylorutveckling
Dubbel- och trippelintegraler
kurvintegral, kurvtangentintegral, ytintegral, normalytintegral
Greens formel samt Gauss' och Stokes satser

tma043 V1, Ht08 bild 6

Syfte:
Kursens syfte är att, tillsammans med övriga matematikkurser, ge en matematisk allmänbildning som är så användbar som möjligt i fortsatta studier och teknisk yrkesverksamhet. Kursen skall på ett logiskt och sammanhängande sätt ge sådana kunskaper i matematisk analys i flera variabler och numerisk analys som är nödvändiga för övriga kurser inom E-programmet.

tma043 V1, Ht08 bild 7

Mål:
Efter fullgjord kurs skall du kunna
redogöra för innebörden hos den matematiska flervariabelanalysens grundläggande begrepp
redogöra för sambanden mellan de olika begreppen
kombinera kunskaper om olika begrepp i praktisk problemlösning
utnyttja programspråket MATLAB för problemlösning.

tma043 V1, Ht08 bild 8

Flervariabelanalys E2, Vecka 1 Ht08

Omfattning och innehåll
10.1 Punkter och vektorer i $\mathbb{R}^n$, mängder i $\mathbb{R}^n$,
10.5 Andragradskurvor och -ytor.
10.2-4 Repetition efter behov

tma043 V1, Ht08 bild 9

Omfattning och innehåll forts.
11.1 Vektorvärda funktioner, derivering
11.2 Tillämpningar av derivatan
11.3 Kurvlängd, parametrisering av kurvor.

tma043 V1, Ht08 bild 10

Mål Denna vecka skall du lära dig

förklara vad som menas med omgivning till en punkt i $\mathbb{R}^n$
förklara vad som menas med inre punkt, yttre punkt och randpunkt till en mängd i $\mathbb{R}^n$
förklara vad som menas med en öppen mängd, en sluten mängd, det inre och det yttre av en mängd i $\mathbb{R}^n$
skissa de olika andragradsytorna och ange deras ekvationer
derivera vektorvärda funktioner av en variabel genom tillämpning av deriveringsreglerna
bestämma parametrisering av vissa kurvor
beräkna längden av kurvor

tma043 V1, Ht08 bild 11

Centrala begrepp:
Avstånd – distance
Omgivning – neighbourhood
Öppen mängd – open set, öppet intervall, öppen cirkelskiva, öppen boll
Sluten mängd – closed set
Randpunkt – boundary point
Inre punkt – interior point, det inre av en mängd
Yttre punkt – exterior point, det yttre av en mängd

Adams 10.1, tma043 V1, Ht08 bild 12

Definition:
Normen, längden av en vektor $\mathbf{v}$ är skalären $\|\mathbf{v}\|$ som ges av:
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ \cdots \ + v_n^2}$
Notera att $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$.
Detta är mycket användbart t.ex. då man vill bevisa att två längder är lika eftersom man då kan utnyttja räkneregler för skalärprodukt och slipper rottecknet.

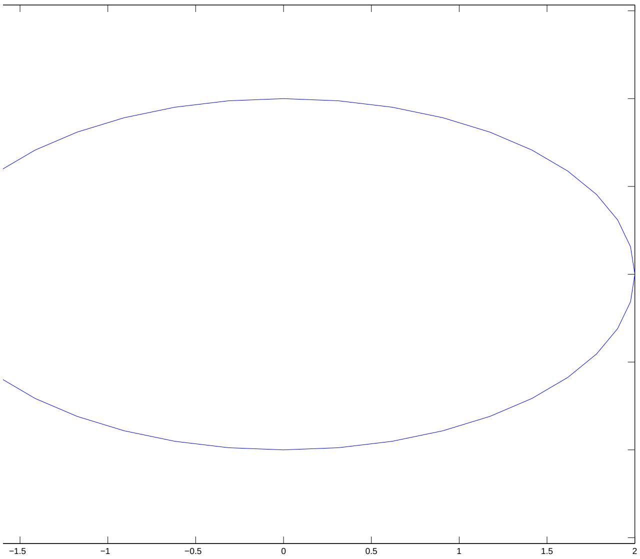
Adams 10.1, tma043 V1, Ht08 bild 13

Definition:
Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$.
Avståndet mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ betecknas $\operatorname{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ och ges av

$$\operatorname{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

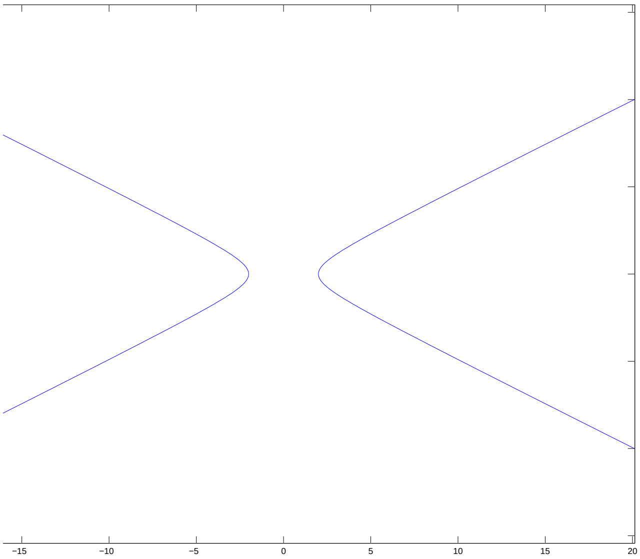
Adams 10.1, tma043 V1, Ht08 bild 14

Ellipser: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.



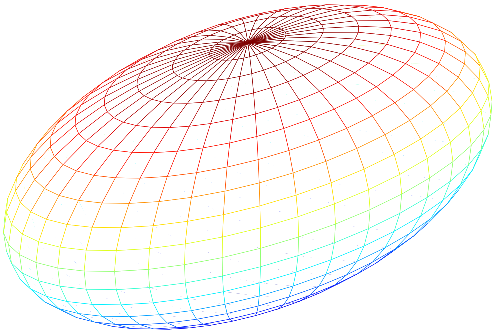
Adams 10.5, tma043 V1, Ht08 bild 15

Hyperbler: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$.



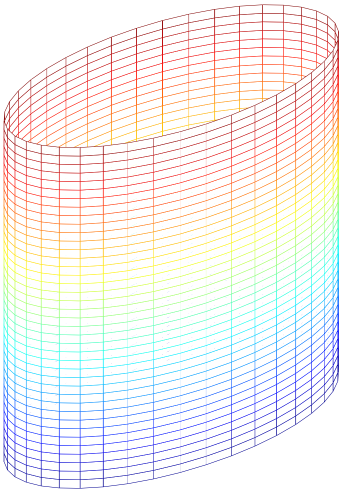
Adams 10.5, tma043 V1, Ht08 bild 16

Ellipsoider: $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.



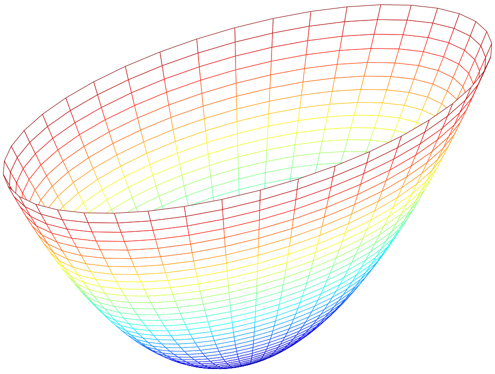
Adams 10.5, tma043 V1, Ht08 bild 17

Elliptisk Cylinder: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.



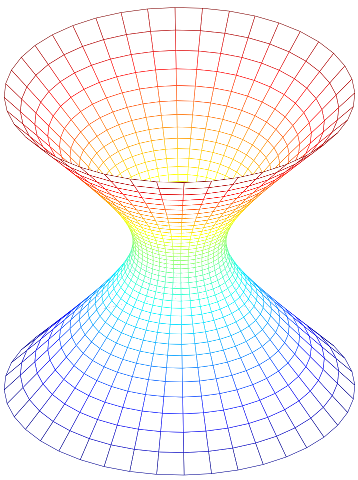
Adams 10.5, tma043 V1, Ht08 bild 18

Elliptisk Paraboloid: $z = x^2/a^2 + y^2/b^2$.



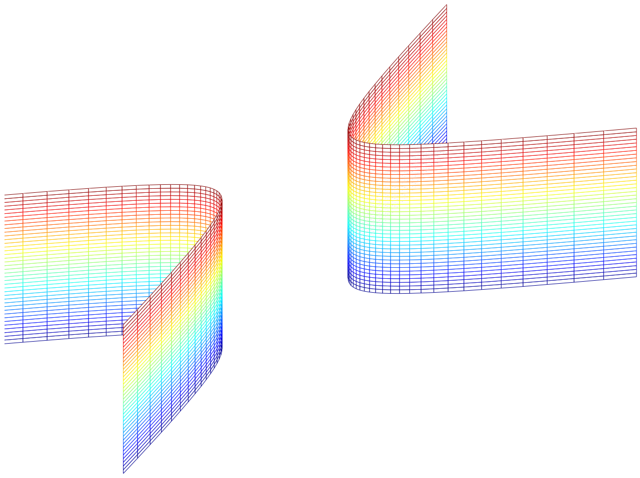
Adams 10.5, tma043 V1, Ht08 bild 19

Enmantlad Hyperboloid: $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$.



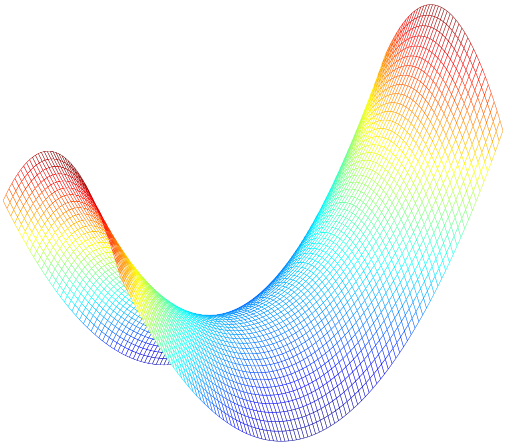
Adams 10.5, tma043 V1, Ht08 bild 20

Hyperbolisk Cylinder: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$.



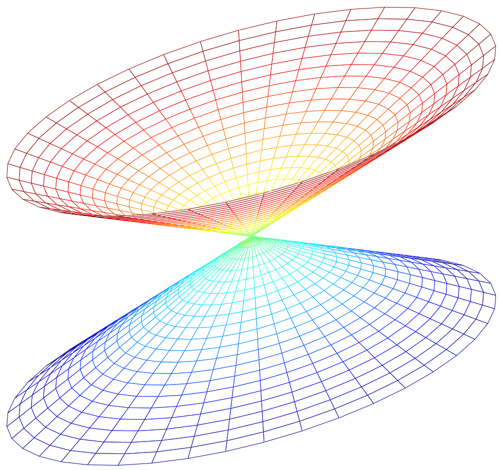
Adams 10.5, tma043 V1, Ht08 bild 21

Hyperbolisk Paraboloid: $z = x^2/a^2 - y^2/b^2$.



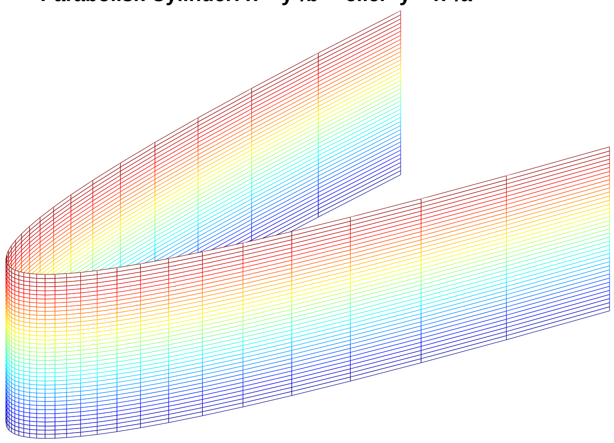
Adams 10.5, tma043 V1, Ht08 bild 22

Koner: $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2 = 0.$

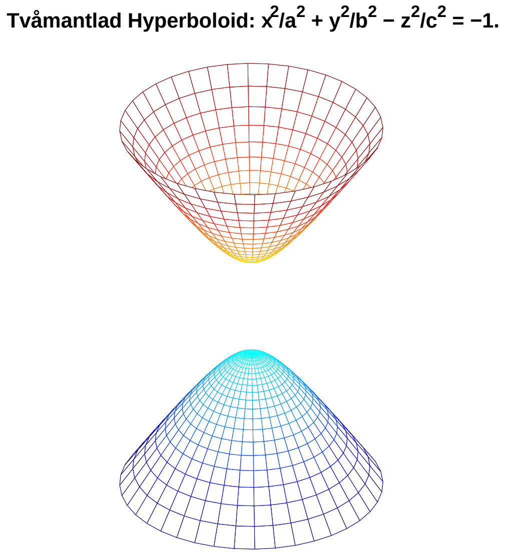


Adams 10.5, tma043 V1, Ht08 bild 23

Parabolisk Cylinder: $x = y^2/b^2$ eller $y = x^2/a^2$



Adams 10.5, tma043 V1, Ht08 bild 24



Adams 10.5, tma043 V1, Ht08 bild 25

Vektorvärd funktion av en variabel

Typexempel: Koordinaterna för en partikel som rör sig i ett koordinatsystem:
$x = x(t), \quad y = y(t) \quad z = z(t)$
där t är tiden och (x, y, z) är punktens koordinater.
Ofta betecknas punktens koordinater med $\mathbf{r}$, där $\mathbf{r} = (x, y, z)$.
Funktionen skrivs då $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
I boken betecknar $\mathbf{i}$ vektorn $(1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ och $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.
Då är $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$.

Adams 11.1, tma043 V1, Ht08 bild 26

Vektorvärda funktioner av en variabel deriveras koordinatvis:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \frac{d}{dt}(x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

Då $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ beskriver en partikelbana kallas $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$ partikelns hastighet.

$v(t) = |\mathbf{v}(t)|$ kallas partikelns fart och $\frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t)$ dess acceleration.

Adams 11.1, tma043 V1, Ht08 bild 27

$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

$\frac{d}{dt}(\lambda(t)\mathbf{u}(t)) = \lambda'(t)\mathbf{u}(t) + \lambda(t)\mathbf{u}'(t)$

$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)$

$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$

$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(\lambda(t))) = \lambda'(t)\mathbf{u}'(\lambda(t))$

$\frac{d}{dt}\,\|\mathbf{u}(t)\| = \frac{\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{u}'(t)}{\|\mathbf{u}(t)\|}$

Adams 11.1, tma043 V1, Ht08 bild 28

Kurvlängd

En kurva ges av en parametrisering $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad a \leq t \leq b$

Kurvans längd ges av integralen

$$s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$$

Adams 11.3, tma043 V1, Ht08 bild 29