Flervariabelanalys E2, Vecka 2 Ht08

Omfattning och innehåll

12.2 Gränsvärden och kontinuitet.
12.3 Partiella derivator, tangentplan och normaler till funktionsytor.
12.4 Högre ordningens derivator.
12.5 Kedjeregeln.
12.6 Linjära approximationer, differentierbarhet och differentialer.

Mål
För betyget godkänd skall du kunna:

- beräkna gränsvärde då $(x, y) \to (0, 0)$, för funktion av två variabler, genom att gå över till polära koordinater och tillämpa standardgränsvärde för funktion av en variabel på ett enkelt sätt.
- ge exempel på funktion av två variabler, som saknar gränsvärde då $(x, y) \to (0, 0)$ men där alla gränsvärden $f(x, kx)$, då $x \to 0$, samt $f(0, y)$, då $y \to 0$, existerar och är lika.
- förklara vad som menas med att en funktion är kontinuerlig

Mål
För betyget godkänd skall du kunna:

- beräkna partiella derivator genom att tillämpa deriveringsregler (summa-, produkt-, kvot- och kedjeregeln) och andra satser.
- bestämma tangentplan och normal till funktionsyta.
- beräkna differential till en funktion och utnyttja denna till approximativ beräkning av funktionsvärden.
- beräkna Jacobimatrisen till en funktion och utnyttja denna till approximativ beräkning av funktionsvärden.

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- definiera begreppet gränsvärde och motivera definitionen
- avgöra om en reellvärd funktion av två variabler har gränsvärde och beräkna det.
- avgöra om en funktion är kontinuerlig.
- definiera begreppet differentierbar funktion
- redogöra för relationerna mellan egenskaperna för en funktion: kontinuerlig, kontinuerliga partiella derivator samt differentierbar
- formulera och bevisa kedjeregeln för sammansatta funktionen $f \circ g$ då $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ och $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Centrala begrepp:
Gränsvärde – limit.

Kontinuerlig – continuous.

Partiell derivata – partial derivative.

Tangent plan, normallinje

Differential

Jacobimatris

Definition: Gränsvärde Låt f vara en reellvärd funktion av två variabler med definitionsmängd D_f.
Vi säger då att

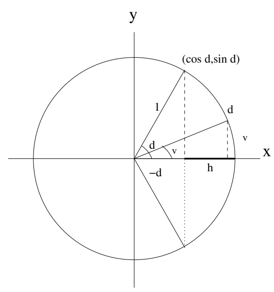
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

om

1. varje omgivning till (a,b) innehåller punkter i D_f andra än (a,b).
2. till varje positivt tal ϵ finns det ett positivt tal $\delta = \delta(\epsilon)$ sådant att $|f(x,y) - L| < \epsilon$ gäller för alla punkter (x,y) i D_f som uppfyller att $0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta$.

Tolkning: $f(x,y)$ har gränsvärdet L då $(x,y) \to (a,b)$ om

1. (a,b) är en inre punkt eller randpunkt till D_f.
2. Skillnaden mellan $f(x,y)$ och L kan fås hur liten som helst, bara man håller sig tillräckligt nära (a,b).



Definition: Kontinuitet Funktionen $f(x,y)$ kallas kontinuerlig i punkten (a,b) om

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Notera att detta innebär att (a,b) skall tillhöra D_f, gränsvärdet skall existera **och** vara samma som funktionsvärdet $f(a,b)$.

Partiell derivata
Låt f vara en reellvärd funktion av två variabler med definitionsmängd D_f och antag att (a, b) är en inre punkt i D_f.
Den partiella derivatan av f med avseende på x är funktionen $f_1(x, y)$ vars funktionsvärde ges av gränsvärdet

$$f_1(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

i de punkter gränsvärdet existerar.
På motsvarande sätt definieras $f_2(x, y)$
Notera att de partella derivatorna bara kan finnas i inre punkter i D_f.

Adams 12.3, tma043 V2, Ht08 bild 10

Olika skrivsätt för partiella derivator:

$$f_1(x, y) = D_1 f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}$$

och i punkten (a, b)

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \left.\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right|_{(a,b)} = f'_x(a, b) = f_1(a, b) = D_1 f(a, b)$$

Adams 12.3, tma043 V2, Ht08 bild 11

En normalvektor till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$ är vektorn

$$\mathbf{n} = f_1(a, b)\mathbf{i} + f_2(a, b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

En ekvation för normallinjen i punkten är

$$\begin{cases} x = a + t f_1(a, b) \\ y = b + t f_2(a, b) \\ z = f(a, b) - t \end{cases}$$

En ekvation för tangentplanet i punkten är

$$z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)$$

Adams 12.3, tma043 V2, Ht08 bild 12

Derivator av högre ordning

$$\frac{\partial}{\partial x} f'_x(x,y) = f''_{xx}(x,y) = f_{11}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f'_y(x,y) = f''_{yx}(x,y) = f''_{21}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f'_x(x,y) = f''_{xy}(x,y) = f''_{12}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f'_y(x,y) = f''_{yy}(x,y) = f''_{22}(x,y)$$

Adams 12.4, tma043 V2, Ht08 bild 13

Sats 1 Om alla partiella derivator av ordningar t.o.m n är kontinuerliga så spelar det ingen roll i vilken ordning deriveringarna utförs, resultatet blir detsamma.
Som exempel är

$$f_{1112} = f_{1121} = f_{1211} = f_{2111}$$

om alla derivator t.o.m ordning 4 är kontinuerliga.

Adams 12.4, tma043 V2, Ht08 bild 14

Kedjeregeln
Om $z = f(x,y)$ har kontinuerliga partiella derivator, och om x och y är deriverbara funktioner av t, så gäller att

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Alternativt skrivsätt:

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f_1((x(t), y(t))x'(t) + f_2((x(t), y(t))y'(t)$$

Adams 12.5, tma043 V2, Ht08 bild 15

Kedjeregeln
Om $z = f(x,y)$ har kontinuerliga partiella derivator, och om $x = x(s,t)$ och $y = y(s,t)$ är har partiella derivator, så gäller att

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Adams 12.5, tma043 V2, Ht08 bild 16

Kedjeregeln på matrisform

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$$

Adams 12.5, tma043 V2, Ht08 bild 17

Med **linjärisering (linearisering)** av f i punkten (a, b) menas funktionen

$$L(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b) \cdot (x - a) + f_2(a, b) \cdot (y - b)$$

Grafen till linjäriseringen av f i punkten (a, b) är **tangentplanet** till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$

Adams 12.6, tma043 V2, Ht08 bild 18

En funktion kallas **differentierbar** i punkten (a, b) om

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b) - hf_1(a, b) - kf_2(a, b)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Adams 12.6, tma043 V2, Ht08 bild 19

Notera att

$$L(a + h, b + k) = f(a, b) + hf_1(a, b) + kf_2(a, b)$$

och att

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) - hf_1(a, b) - kf_2(a, b) = \\ f(a + h, b + k) - L(a + h, b + k) = \epsilon(h, k)$$

där $\epsilon(h, k)$ är felet som uppstår då f ersätts med linjäriseringen L.

f är alltså differentierbar i punkten (a, b) om detta fel är litet i jämförelse med $\|(h, k)\| = \sqrt{h^2 + k^2}$.

Adams 12.6, tma043 V2, Ht08 bild 20

Sats 4 Om f_1 och f_2 är kontinuerliga i en omgivning till (a, b) så är f differentierbar i (a, b)

Adams 12.6, tma043 V2, Ht08 bild 21

Differentialen till en funktion $f(x,y)$ är funktionen av fyra variabler:

$$df(x,y,dx,dy) = f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy$$

Differentialen i punkten (a,b) kan ses som en funktion av två variabler:

$$df(a,b,h,k) = f_1(a,b)h + f_2(a,b)k$$

Funktionen f är differentierbar i (a,b) om och endast om

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(f(a+h,b+k) - f(a,b)) - df(a,b,h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$df(x,y,dx,dy)$ är då en bra approximation till den verkliga förändringen $\Delta f = f(x+dx, y+dy) - f(x,y)$.

En funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ges av m funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$
$\mathbf{f} = (f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_m)$
Om $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ och $\mathbf{y} = (y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m)$ där
$y_1 = f_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$
$y_2 = f_2(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$
$\vdots$
$y_m = f_m(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$
så kan vi skriva $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Jacobimatrisen
De partiella derivatorna till $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ kan samlas i en matris

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Den **linjära avbildning** som har Jacobimatrisen, i en viss punkt, som avbildningsmatris kallas funktionens derivata i den punkten.

Kedjeregeln

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Differentialen

$$d\mathbf{y} = D\mathbf{f}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Adams 12.6, tma043 V2, Ht08 bild 26