Flervariabelanalys E2, Vecka 3 Ht08

Omfattning och innehåll

- **12.7** Gradienter och riktningsderivator.
- **12.8** Implicita funktioner
- **12.9** Taylorserier och approximationer
- **13.1** Extremvärden
- **13.2** Extremvärden under bivillkor
- **13.3** Lagranges multiplikatormetod
- **13.6** Newtons metod för $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Mål För betyget godkänd skall du kunna:

- beräkna gradient och riktningsderivata till en funktion av två eller tre variabler och utnyttja deras egenskaper (sats 12.7.6 och s 683, 686, 687) vid problemlösning.
- beräkna taylorpolynom till funktioner av två variabler, både genom att utgå från Taylors formel och genom att utnyttja kända Taylorpolynom i en variabel.
- förklara vad som menas med lokalt maximum (minimum), sadelpunkt, globalt maximum (minimum), kritisk/stationär punkt (critical point) och singulär punkt med matematisk text, egna ord eller exempel.
- bestämma kritiska/stationära punkter för en funktion $f(x, y)$ där ekvationssystemet $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ är relativt enkelt och klassificera de kritiska punkterna med hjälp av sats 13.1.3 (rem. s 712).

- utnyttja sats 13.1.1 för att bestämma största och minsta värde på kompakt mängd för en funktion $f(x, y)$ sådan att det är relativt enkelt att bestämma kritiska punkter samt största/minsta värde på områdets rand.
- bestämma extremvärden för en funktion $f(x, y)$, eller $f(x, y, z)$ under bivillkor $g(x, y) = 0$, eller $g(x, y, z) = 0$, med Lagranges multiplikatormetod då den leder till relativt enkelt ekvationssystem.
- lösa ickelinjära ekvationssystem med bl.a. Newtons metod och och optimera funktioner med bl.a. gradientmetoden (Matlab)

Mål För högre betyg skall du dessutom kunna:

- definiera begreppen gradient och riktningsderivata till en funktion, samt redogöra för och bevisa deras egenskaper
- bestämma strömlinjer/ortogonalkurvor till nivåkurvor till funktion av två variabler (se övn 12.7.21e)
- avgöra om en ekvation eller ett system av ekvationer definierar en funktion implicit och, i så fall, beräkna funktionens partiella derivator.
- bestämma taylorpolynom till implicit definierad funktion
- definiera begreppen lokalt maximum (minimum), sadelpunkt, globalt maximum (minimum) och kritisk/stationär punkt (critical point)
- lösa problem enligt godkäntmålen där ekvationssystemen inte är fullt så enkla, eller dimensionen > 2, eller flera bivillkor.

Definition 6 Gradientvektorn till en funktion som har partiella derivator är

$$\nabla f(x,y) = \text{grad}\, f(x,y) = f_1(x,y)\mathbf{i} + f_2(x,y)\mathbf{j}$$

Sats 6 Om f är differentierbar i punkten (a,b) och $\nabla f(a,b) \neq \mathbf{0}$, så är $\nabla f(a,b)$ normalvektor till nivåkurvan genom punkten (a,b).

Observera: En normalvektor till *ytan* $z = f(x,y)$ och till tangentplanet i punkten $(a,b,f(a,b))$ är vektorn $f_1(x,y)\mathbf{i} + f_2(x,y)\mathbf{j} - \mathbf{k}$

Tänk på *dimensionerna*: Kartan och gradientvektorn är tvådimensionell, funktionsytan och tangentplanet ligger i $\mathbb{R}^3$.

Adams 12.7, tma043 V2, Ht08 bild 5

Definition 7 Riktningsderivatan till $f(x,y)$ i punkten (a,b) i riktningen $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$, där $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u^2+v^2} = 1$ är gränsvärdet

$$D_{\mathbf{u}}f(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hu, b+hv) - f(a,b)}{h}$$

om gränsvärdet finns.
Andra beteckningar är $f_{\mathbf{u}}(a,b)$ eller $f'_{\mathbf{u}}(a,b)$.
Av definitionen följer att

$$D_{\mathbf{u}}f(a,b) = \frac{d}{dt}\, f(a+tu, b+tv)\big|_{t=0}$$

Sats 7 Om f är differentierbar i (a,b) och $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ är en enhetsvektor så gäller:

$$D_{\mathbf{u}}f(a,b) = \mathbf{u}\cdot\nabla f(a,b)$$

Adams 12.7, tma043 V2, Ht08 bild 6

Notera att $D_{\mathbf{u}}f(a,b) = \mathbf{u}\cdot\nabla f(a,b) = \|\mathbf{u}\|\,\|\nabla f(a,b)\|\cos\theta$ där θ är vinkel mellan $\mathbf{u}$ och $\nabla f(a,b)$.
Eftersom $\|\mathbf{u}\| = 1$ så gäller $D_{\mathbf{u}}f(a,b) = \|\nabla f(a,b)\|\cos\theta$.
Vidare är $D_{\mathbf{u}}f(a,b)$ tillväxthastigheten i riktningen $\mathbf{u}$. alltså gäller:

(i) I punkten (a,b) växer f snabbast i riktningen som ges av $\nabla f(a,b)$. Den maximala tillväxthastigheten är $\|\nabla f(a,b)\|$.

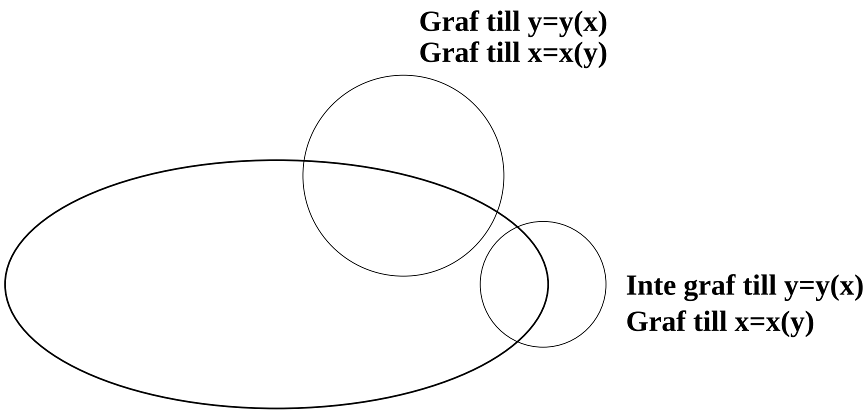
(ii) I punkten (a,b) avtar f snabbast i riktningen som ges av $-\nabla f(a,b)$. Den maximala nedgångshastigheten är $\|\nabla f(a,b)\|$.

(iii) Tillväxthastigheten i punkten (a,b) är 0 i riktningar parallella med nivåkurvan $f(x,y) = f(a,b)$.

Sats 8, Implicita funktionssatsen

Borde heta: **Satsen om implicit definierade funktioner.** Ger villkor som garanterar att en nivåkurva, nivåyta etc. är graf till en funktion.
Löst talat: Om $f(a,b) = C$ och normalvektorn till nivåkurvan $f(x,y) = C$ i (a,b), grad $f(a,b)$, inte är parallell med x-axeln så finns en omgivning U till (a,b) sådan att den del av nivåkurvan som ligger i U är graf till någon funktion $y = y(x)$ med $y(a) = b$.
Är grad $f(a,b)$ inte parallell med y-axeln så finns en omgivning V till (a,b) sådan att den del av nivåkurvan som ligger i V är graf till någon funktion $x = x(y)$ med $x(b) = a$.

Sats 8, Implicita funktionssatsen



Sats 8, Implicita funktionssatsen
Om funktionen $f(x,y)$ har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av en punkt (a,b) sådan att $f(a,b)=0$ och $f_2(a,b)\neq 0$ så definierar ekvationen $f(x,y)=0$, i närheten av (a,b), en deriverbar funktion
$y=y(x)$ sådan att $y(a)=b$ och $f(x,y(x))=0$.

Derivatan till $y(x)$ kan beräknas genom implicit derivering (användning av kedjeregeln):

$\frac{d}{dx}\left(f(x,y(x))\right)=\frac{d}{dx}0 \Rightarrow$
$f_1(x,y(x))+f_2(x,y(x))\cdot y'(x)=0$

Speciellt är $y'(a)=-\frac{f_1(a,b)}{f_2(a,b)}$

Om $f_1(a,b)\neq 0$ så definierar ekvationen $f(x,y)=0$ en funktion
$x=x(y)$ sådan att $x(b)=a$ och

$x'(b)=-\frac{f_2(a,b)}{f_1(a,b)}$.

Sats 8, Implicita funktionssatsen
Om funktionen $f(x,y,z)$ har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av en punkt (a,b,c) sådan att $f(a,b,c)=0$ och $f_3(a,b,c)\neq 0$ så definierar ekvationen $f(x,y,z)=0$, i närheten av (a,b,c), en funktion $z=z(x,y)$ sådan att $z(a,b)=c$ och $f(x,y,z(x,y))=0$.

De partiella derivatorna till $z(x,y)$ kan beräknas genom implicit derivering (användning av kedjeregeln):

$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x,y,z(x,y))\right)=\frac{\partial}{\partial x}0 \Rightarrow$
$f_1(x,y,z(x,y))+f_3(x,y,z(x,y))\cdot\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=0$

Speciellt är $z_1(a,b))=-\frac{f_1(a,b,c)}{f_3(a,b,c)}$

På samma sätt erhålls $z_2(a,b))=-\frac{f_2(a,b,c)}{f_3(a,b,c)}$

Jacobideterminanten, Jacobianen till $u = u(x,y)$ och $v = v(x,y)$ är determinanten

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Jacobideterminanten till funktionerna $F(x,y,\cdots)$ och $G(x,y,\cdots)$ med avseende på variablerna x och y är determinanten

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Notera att F och G kan vara funktioner av ytterligare ett antal variabler. Jacobideterminanten är en funktion av samma variabler som F och G.

Jacobideterminanten $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}$ är motsvarande 3×3-determinant, osv.

Om $\mathbf{f}$ är en funktion från $\mathbb{R}^{m+n}$ till $\mathbb{R}^n$, alltså i princip n funktioner av $m+n$ variabler, så kan variablerna skrivas $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ där $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ och $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Vi har då $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Jacobideterminanten skrivs nu enklast $\frac{\partial \mathbf{f})}{\partial \mathbf{y}}$

Sats 8, Implicita funktionssatsen
Om funktionerna $f(u,v,x,y)$ och $g(u,v,x,y)$ har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av en punkt (a,b,c,d) sådan att $\begin{cases} f(a,b,c,d) = 0 \\ g(a,b,c,d) = 0 \end{cases}$ och $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(a,b,c,d) \neq 0$

så definierar ekvationssystemet

$\begin{cases} f(u,v,x,y) = 0 \\ g(u,v,x,y) = 0 \end{cases}$, i närheten av (a,b,c,d),

funktioner $x = x(u,v)$ och $y = y(u,v)$ sådana att

$$\begin{cases} x(a,b) = c \\ y(a,b) = d \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} f(u,v,x(u,v),y(u,v)) = 0 \\ g(u,v,x(u,v),y(u,v)) = 0 \end{cases}.$$

De partiella derivatorna till $x(u,v)$ och $y(u,v)$ kan beräknas genom implicit derivering (användning av kedjeregeln): till exempel

$\frac{\partial}{\partial u}\left(f(u,v,x(u,v),y(u,v))\right) = 0 \Rightarrow$
$f_1(u,v,x(u,v),y(u,v)) + f_3(u,v,x(u,v),y(u,v)) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + f_4(u,v,x(u,v),y(u,v)) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) = 0$

På samma sätt deriveras den första ekvationen med avseende på v och den andra med avseende på u och v. Detta ger fyra ekvationer ur vilka de partiella derivatorna till $x(u,v)$ och $y(u,v)$ kan beräknas.

De fyra ekvationerna ovan kan skrivas på matrisform.

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_3 & f_4 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Här skall f_i läsas $f_i(u,v,x(u,v),y(u,v))$ och de partiella derivatorna av x och y skall tas i punkten (u,v).
Matrisen $\begin{bmatrix} f_3 & f_4 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}$ är inverterbar eftersom dess determinant är $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$ som är nollskild i närheten av (a,b,c,d).
Alltså gäller:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f_3 & f_4 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{bmatrix}.$$

Taylors formel Antag att $f(x,y)$ har kontinuerliga partiella derivator av ordning t.o.m. $n+1$ i en omgivning till punkten (a,b) och antag att punkten $(a+h, b+k)$ ligger i denna omgivning.

Då gäller:

$$f(a+h, b+k) = \sum_{m=0}^{n} (hD_1 + kD_2)^m f(a,b) + R_n(h,k)$$

där $R_n(h,k) = (hD_1 + kD_2)^{n+1} f(a+\theta h, b+\theta k)$ för något tal θ mellan 0 och 1.

Med $x = a+h$ och $y = b+k$ skrivs formeln:

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{n} ((x-a)D_1 + (y-b)D_2)^m f(a,b) + R_n(h,k)$$

Speciellt är Taylorpolynomet av ordning 2 i punkten (a, b):

$$\begin{aligned} P_2(x, y) = f(a, b) + (x - a)f_1(a, b) + (y - b)f_2(a, b) + \\ \frac{1}{2}\big((x - a)^2 f_{11}(a, b) + 2(x - a)(y - b)f_{12}(a, b) + \\ (y - b)^2 f_{22}(a, b)\big) \end{aligned}$$

Taylorpolynomet av ordning 3 i punkten (a, b) är:

$$\begin{aligned} P_3(x, y) = P_2(x, y) + \frac{1}{6}\big((x - a)^3 f_{111}(a, b) + \\ 3(x - a)^2(y - b)f_{112}(a, b) + 3(x - a)(y - b)^2 f_{122}(a, b) + \\ (y - b)^3 f_{222}(a, b)\big) \end{aligned}$$

Polynomen av högre ordning erhålls på samma sätt. Koefficienten framför respektive term är motsvarande binomialkoefficient. Den bestäms enklast med hjälp av Pascals triangel.

Adams 12.9, tma043 V2, Ht08 bild 18

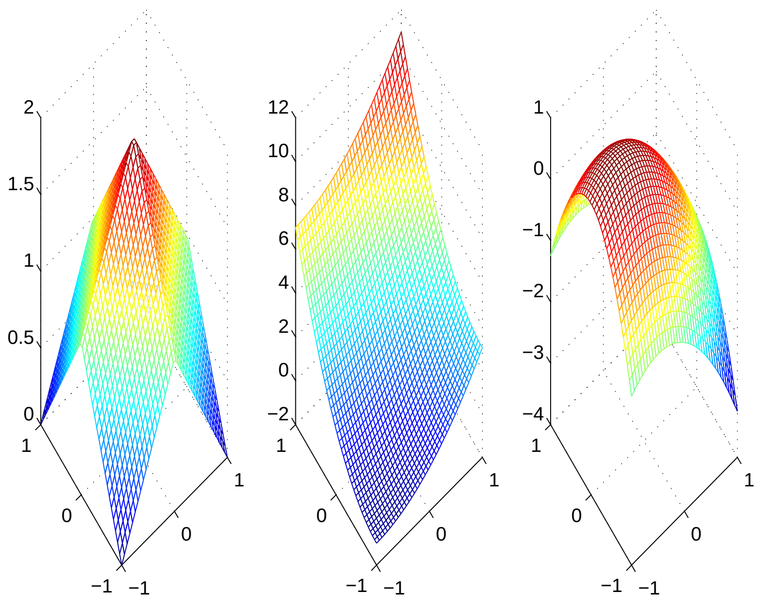
En funktion har lokalt maximum i en punkt (a, b) om det finns en omgivning $B_r(a, b)$ sådan att

$$f(x, y) \le f(a, b) \quad \text{för alla } (x, y) \in D_f \cup B_r(a, b)$$

Adams 13.1, tma043 V2, Ht08 bild 19

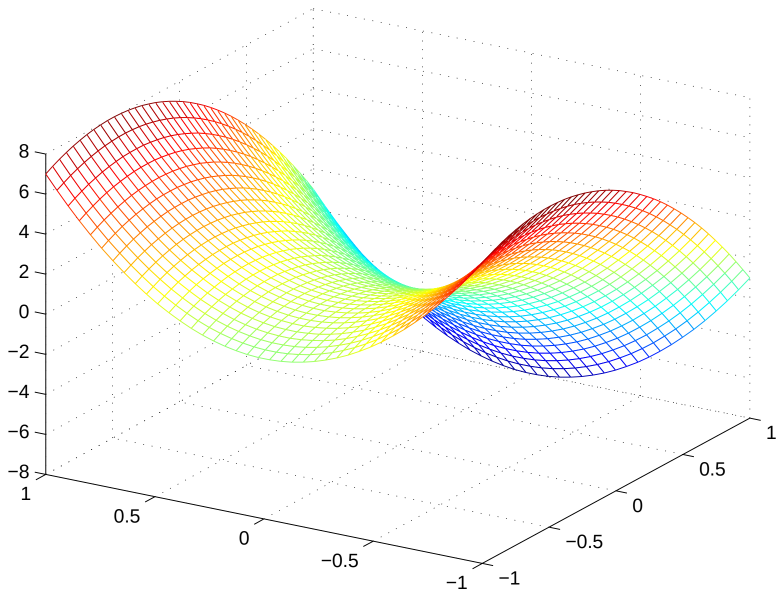
Sats 1 Lokalt maximum kan erhållas i:

1. punkt där gradienten inte existerar,s.k. *singulär punkt*
2. punkt på randen av definitionsområdet, *randpunkt*
3. punkt där grad $f(x,y) = \mathbf{0}$ s.k. *kritisk punkt*



Adams 13.1, tma043 V2, Ht08 bild 20

Sadelpunkt



Sats 3: Klassificering av kritiska punkter med andraderivatorna

Antag att (a, b) är en kritisk punkt för funktionen $f(x, y)$

Sätt $A = f_{11}(a, b), \quad B = f_{12}(a, b)$ och $C = f_{22}(a, b)$

(i) Om $AC - B^2 > 0$ och $A > 0$ så har f lokalt minimum i (a, b)

(ii) Om $AC - B^2 > 0$ och $A < 0$ så har f lokalt maximum i (a, b)

(iii) Om $AC - B^2 < 0$ så har f sadelpunkt i (a, b)

(iv) Om $AC - B^2 = 0$ så ger denna test ingen information, taylopolynom av högre ordning måste användas.

Med största värdet av $f(x,y)$ på en mängd D, som förutsätts vara en delmängd av f:s definitionsområde D_f, menas största värdet av f för punkter som ligger i D.

Ofta används beteckningen $f(D)$ för

$$\{z : z = f(x,y) \text{ för något } (x,y) \in D\}.$$

Största värdet av $f(x,y)$ på D är alltså det största talet i $f(D)$, om det finns ett sådant.

Ofta ges D av en eller flera olikheter eller ekvationer som $g(x,y) \leq 0$ eller $g(x,y) = 0$.

T.ex. ger olikheten $9x^2 + 4y^2 - 36 \leq 0$ en elliptisk skiva och ekvationen $9x^2 + 4y^2 = 36$ en ellips.

Då D ges på detta sätt kallas största värdet av f på D ofta största värdet av f under *bivillkoret* $g(x,y) \leq 0$ eller $g(x,y) = 0$.

Man säger också att f har lokalt maximum i punkten (a,b) under bivillkoret $g(x,y) \leq 0$ om punkten uppfyller bivillkoret och $f(x,y) \leq f(a,b)$ för alla punkter (x,y) som uppfyller bivillkoret och ligger i någon lämplig omgivning till (a,b).

Sats 13.1.2 Existens av extremvärde.
Om f är kontinuerlig i ett slutet, begränsat och sammanhängande område, D, så är $f(D)$ ett slutet och begränsat intervall.

Speciellt har funktionen ett största värde och ett minsta värde i D. I de punkter dessa värden antas, har f lokalt maximum respektive lokalt minimum.de är alltså endera

(i) singulära punkter,

(ii) randpunkter eller

(iii) kritiska punkter.

Om D är sammanhängande (varje par av punkter i D kan förbindas med en kurva i D) så gäller satsen om mellanliggande värde: om m är funktionens minsta värde i D och M det största och c är ett tal mellan m och M så är $c = f(a, b)$ för någon punkt (a, b) i D.

Detta gäller inte om D inte är sammanhängande.

Adams 13.2, tma043 V2, Ht08 bild 25

Sats 4: Lagranges multiplikatormetod
Antag att

(i) funktionerna f och g har kontinuerliga första ordningens partiella derivator i en omgivning av punkten (a, b)

(ii) punkten (a, b) ligger på kurvan $\mathcal{C} : g(x, y) = 0$ (dvs. $g(a, b) = 0$)

(iii) f har lokalt maximum eller minimum i (a, b) under bivillkoret $g(x, y) = 0$

(iv) punkten (a, b) är inte en ändpunkt till kurvan $\mathcal{C}$

(v) $\nabla g(a, b) \neq \mathbf{0}$

Då finns ett tal λ så att (a, b, λ) är kritisk punkt för *Lagrangefunktionen* $\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.

Adams 13.3, tma043 V2, Ht08 bild 26

Att (a, b, λ) är kritisk punkt för $\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ innebär att $\nabla f(a, b)$ och $\nabla g(a, b)$ är parallella.
Detta innebär i sin tur att nivåkurvan $f(x, y) = k$ där $k = f(a, b)$ och kurvan $g(x, y) = 0$ tangerar varandra i punkten (a, b).
Metoden är användbar också för funktioner av tre variabler:

(a, b, c, λ) är kritisk punkt för $\Phi(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$ innebär att nivåytan $f(x, y, z) = k$ där $k = f(a, b, c)$ tangerar ytan $g(x, y, z) = 0$ i punkten (a, b, c).

Exempel: Extremvärde under bivillkor

Vi söker största och minsta värdet för funktionen $f(x, y) = 8x^2 + 4xy$ då punkten (x, y) ligger på ellipsen $4x^2 + y^2 = 16$.