Flervariabelanalys E2, Vecka 4 Ht08

Omfattning och innehåll

- **14.1** Dubbelintegralens definition.
- **14.2** Upprepad enkelintegralsberäkning.
- **14.3** Generaliserade dubbelintegraler och medelvärdessatsen.
- **14.4** Dubbelintegraler i polära koordinater, substitution.
- **14.5** Trippelintegraler.
- **14.6** Substitution i trippelintegraler.

För betyget godkänd skall du kunna:

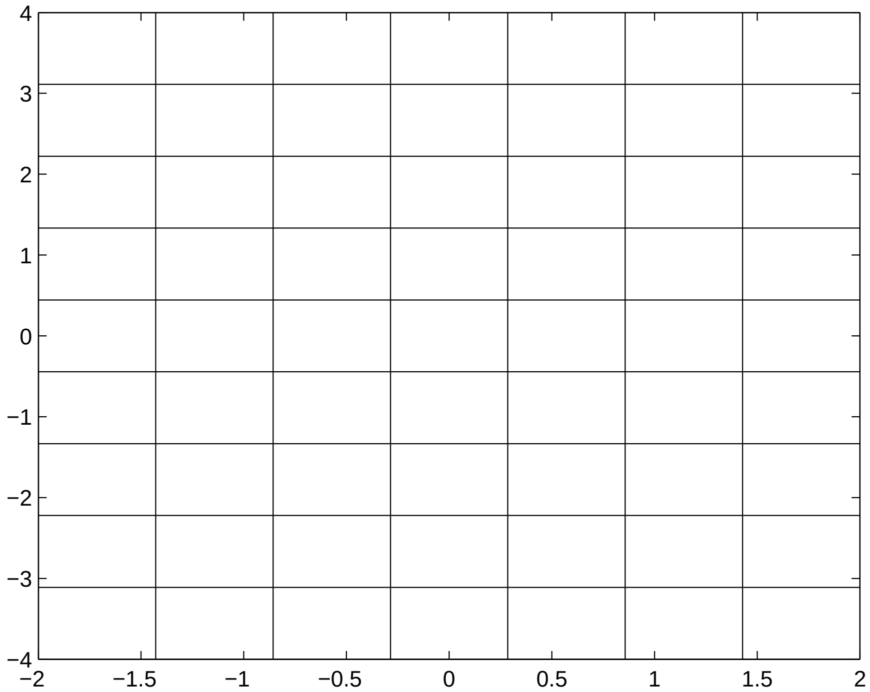
- känna till och utnyttja dubbelintegralens egenskaper (sid 758) vid problemlösning
- beräkna dubbelintegral genom upprepad enkelintegration
- avgöra huruvida en integral är generaliserad och i så fall förklara vad som gör den generaliserad
- beräkna generaliserad dubbelintegral med icke-negativ integrand och därigenom avgöra om den är konvergent eller divergent
- veta vad som menas med medelvärdet av en funktion av två eller tre variabler på ett område
- beräkna dubbelintegraler med hjälp av föreslagen variabelsubstitution
- beräkna trippelintegraler genom upprepad enkelintegration och med hjälp av föreslagen variabelsubstitution

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- förklara vad det innebär att en funktion är integrerbar över ett område i planet (sid 755 och def på sid 756,757) och utnyttja Riemannsummor för att approximera värdet på en integral (ex.1 sid 756,757)
- redogöra för dubbelintegralens egenskaper (sid 758)
- formulera och bevisa medelvärdessatsen för dubbelintegraler.
- känna till vad som menas med att en transformation $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är ett-ett (one to one) och hur man kan använda Implicita funktionssatsen för att avgöra om en transformation är ett-ett (sid 777).

- känna till sambandet mellan Jacobianen till en transformation och Jacobianen till transformationens invers (sid 777)
- formulera satsen om variabelsubstitution i dubbelintegraler (sid 778).
- välja lämplig variabelsubstitution för beräkning av dubbel- eller trippelintegral
- beräkna itererad enkelintegral, med två eller tre variabler, genom att kasta om integrationsordningen.

Låt D vara en axelparallell rektangel i xy-planet: $D = \{(x, y) : \ a \le x \le b, \ \ c \le y \le d \}$.



En partition P av D är en indelning av D i mindre, axelparallella rektanglar. *Normen* av partitionen, $\|P\|$ är längsta diagonalen i alla delrektanglarna.

En *Riemannsumma* till f erhålls om man väljer en punkt (x_{ij}^*, y_{ij}^*) i varje delrektangel $R_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1} \le x \le x_i, \ y_{j-1} \le y \le y_j \}$ och bildar summan

$$R(f, P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A_{ij}$$

där $\Delta A_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ är arean av rektangel R_{ij}.
Varje term i summan kan tolkas som volymen av ett rätblock med bas R_{ij} och höjd $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$.
När indelningen är ”oändligt fin” är Riemannsumman volymen av kroppen med bottenyta D och ytan $z = f(x, y)$ till lock.

Definition: Dubbelintegral över en rektangel

Funktionen f är *integrerbar* över rektangeln D och har *dubbelintegralen*

$$I = \iint_D f(x,y)dA$$

om det är så att

för varje positivt tal ϵ finns det ett tal δ (som beror på ϵ) så att

$$|R(f,P) - I| < \epsilon$$

för varje indelning P av D som uppfyller $\|P\| < \delta$ och för alla val av punkter i delrektanglarna i P.

Adams 14.1, tma043 V4, Ht08 bild 7

Dubbelintegralens egenskaper

(a) $\iint_D f(x,y)dA = 0$ om D har area 0

(b) $\iint_D dA =$ arean av D

(c) Om $f(x,y) \geq 0$ i hela D så är $\iint_D f(x,y)dA = V \geq 0$ där V är volymen av kroppen som begränsas nedåt av D och uppåt av ytan $z = f(x,y)$

(d) Om $f(x,y) \leq 0$ i hela D så är $\iint_D f(x,y)dA = -V \leq 0$ där V är volymen av kroppen som begränsas uppåt av D och nedåt av ytan $z = f(x,y)$

Adams 14.1, tma043 V4, Ht08 bild 8

(e) Om k är en konstant så gäller

$$\iint_D k \cdot f(x, y) dA = k \cdot \iint_D f(x, y)$$

(f) $$\iint_D (f(x, y) + g(x, y)) dA = \iint_D f(x, y) dA + \iint_D g(x, y) dA$$

(g) Om $D = D_1 \cup D_2$ och arean av $D_1 \cap D_2$ är 0, så är

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA$$

(h) Om $f(x, y) \leq g(x, y)$ i hela D så gäller

$$\iint_D f(x, y) dA \leq \iint_D g(x, y) dA$$

(i) $$\left| \iint_D f(x, y) dA \right| \leq \iint_D |f(x, y)| \, dA$$