Flervariabelanalys E2, Vecka 5 Ht08

Omfattning och innehåll

- **15.1** Vektorfält och skalärfält
- **15.2** Konservativa vektorfält (t.o.m. exempel 5)
- **15.3** Kurvintegraler
- **15.4** Kurvintegral av vektorfält
- **15.5** Ytor och ytintegraler
- **15.6** Orienterade ytor och flödesintegraler (normal-ytintegraler)

.

Mål: För betyget godkänd skall du kunna:

- skissa ett vektorfält i planet och beräkna fältlinjer till det.
- definiera begreppet *konservativt vektorfält* och beräkna *potential* till ett konservativt fält.
- känna till nödvändiga villkor för att ett vektorfält skall vara konservativt (sid 813) och med hjälp av dessa kunna visa att ett givet vektorfält inte är konservativt.
- förklara sambandet mellan nivåkurvor till en potential och fältlinjerna till ett konservativt vektorfält.

- definiera begreppen *kurvintegral av en funktion* och *kurvintegral av ett vektorfält* och kunna beräkna sådana integraler genom parametrisering av kurvan.
- tillämpa satsen om kurvintegralers oberoende av integrationsvägen.
- definiera begreppen *ytintegral av en funktion över en yta* och *flöde av ett vektorfält genom en orienterad yta* och kunna beräkna sådana integraler och flöden genom parametrisering av ytan.
- tillämpa kurv- och ytintegral för att bestämma t.ex. massa, laddning och tyngdpunkt (se t.ex. övn 15.3.9, 15.5.17 & 15.5.23).

Mål För högre betyg skall du dessutom kunna:

- definiera begreppen *område, sammanhängande område* och *enkelt samanhängande område.*
- formulera och bevisa satsen om kurvintegralers oberoende av integrationsvägen.
- motivera definitionerna av begreppen kurvintegral, ytintegral av en funktion över en yta och flöde av ett vektorfält genom en orienterad yta, genom att ge exempel på tillämpning och förklaring av varför respektive integraltyp kan utnyttjas i exemplet.

Ett vektorfält i planet är en funktion $\mathbf{F}$ från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$.
$\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$

Vi uppfattar (x, y) som en punkt i planet och $\mathbf{F}(x, y)$ som en vektor i planet.

För att åskådliggöra vektorfältet väljer vi ett antal punkter (x_i, y_i) och avsätter vektorerna $\mathbf{F}(x_i, y_i)$ i respektive punkter.

Ett vektorfält i rummet är en funktion $\mathbf{F}$ från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$.
$\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$
uppfattad på samma sätt som vektorfält i planet.

Adams 15.1, tma043 V5, Ht08 bild 6

Fältlinjerna till ett vektorfält är kurvor vars tangenter är parallella med vektorfältets vektorer.

Alltså: Låt (a,b) vara en punkt i definitionsmängden till vektorfältet $\mathbf{F}(x,y) = f(x,y)\mathbf{i} + g(x,y)\mathbf{j}$.

En fältlinje genom denna punkt är en kurva $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ sådan att

$\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0) = (a,b)$ och

$x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j}$ är parallell med $f(a,b)\mathbf{i} + g(a,b)\mathbf{j}$

Adams 15.1, tma043 V5, Ht08 bild 7

Fältlinjerna är lösningarna till differentialekvationen

$$\frac{dx}{f(x,y)} = \frac{dy}{g(x,y)}$$

Adams 15.1, tma043 V5, Ht08 bild 8

Ett vektorfält, $\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$ med definitionsmängd D, kallas *konservativt* om det finns en funktion $\phi(x,y,z)$ definierad på D, sådan att

$$\nabla\phi(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) \text{ för alla } (x,y,z) \in D$$

Funktionen $\phi(x,y,z)$ kallas *potential* till $\mathbf{F}(x,y,z)$.

Nivåytorna $\phi(x,y,z) = C$ kallas ekvipotentialytor till $\mathbf{F}(x,y,z)$

Adams 15.2, tma043 V5, Ht08 bild 9

Ett vektorfält, $\mathbf{F}(x, y,) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ med definitionsmängd D, kallas *konservativt* om det finns en funktion $\phi(x, y)$ definierad på D, sådan att

$$\nabla\phi(x, y) = \mathbf{F}(x, y) \text{ för alla } (x, y) \in D$$

Funktionen $\phi(x, y)$ kallas *potential* till $\mathbf{F}(x, y)$.

Nivåkurvorna $\phi(x, y) = C$ kallas ekvipotentialkurvor till $\mathbf{F}(x, y)$

Fältlinjerna till $\mathbf{F}(x, y)$ är ortogonala mot ekvipotentialkurvorna till $\mathbf{F}(x, y)$

Adams 15.2, tma043 V5, Ht08 bild 10

Observera att i tillämpningar och i de flesta matteböcker är ϕ potential till $\mathbf{F}$ om

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla\phi(x, y, z) \text{ för alla } (x, y, z) \in D$$

Följer man fältlinjerna i $\mathbf{F}$:s riktning så *minskar* i så fall potentialen.

Om en partikel faller i ett gravitationsfält så uträttar gravitationen ett arbete, partikels kinetiska energi ökar och dess potentiella energi minskar med motsvarande mängd.
I Adams bok är det tvärtom, potentialfunktionens värde ökar i $\mathbf{F}$:s riktning. Matematiskt sett är det ingen väsentlig skillnad men ett missat minustecken kan vara ödesdigert.

Adams 15.2, tma043 V5, Ht08 bild 11

Om $\mathbf{F}(x, y,) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ är konservativt i D så måste gälla att:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} g(x, y)$$

i alla punkter $(x, y) \in D$

Adams 15.2, tma043 V5, Ht08 bild 12

Om $\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$ är konservativt i D så måste gälla att:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} g(x,y,z)$$
$$\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} h(x,y,z)$$
$$\frac{\partial}{\partial z} g(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y} h(x,y,z)$$

i alla punkter $(x,y,z) \in D$

Med *kurvintegralen av* $f(x,y,z)$ över (eller längs) kurvan $\mathcal{C}$ menas integralen

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt$$

där $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ $\;a \le t \le b$ är en parametrisering av kurvan $\mathcal{C}$.

Med *kurvintegralen av den tangentiella komponenten av* $\mathbf{F}(x,y,z)$ över (eller längs) kurvan $\mathcal{C}$ menas integralen

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds$$

där $\hat{\mathbf{T}}$ är en enhetstangent till kurvan $\mathcal{C}$.
Men $\hat{\mathbf{T}} ds = \mathbf{r}'(t)dt$ så

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt$$

Om $\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$ så skriver man ofta

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dz$$

Definition: Ett område D kallas *sammanhängande* om varje par av punkter P och Q i D kan bindas samman med en styckvis glatt kurva som ligger helt i D.

Definition: Ett område D kallas *enkelt sammanhängande* om varje *enkel sluten kurva* kan dras samman till en punkt utan att lämna D under sammandragningen.

Adams 15.4, tma043 V5, Ht08 bild 16

Definition: En funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ kallas *smoth – glatt* om den har kontinuerlig derivata. En funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$ kallas glatt om de partiella derivatorna är kontinuerliga. En funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ kallas glatt om komponentfunktionerna är glatta.

En kurva är *glatt* om den har en glatt parametrisering med derivata $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ för alla t. Den är *styckvis glatt* om den kan delas in i ändligt många glatta delar.

Adams 15.4, tma043 V5, Ht08 bild 17

Låt D vara ett öppet sammanhängande område och låt $\mathbf{F}$ vara ett glatt vektorfält definierat på D.
Då är följande tre utsagor ekvivalenta i den meningen att om ett av dem är sant (för ett visst vektorfält och ett visst område) så är de andra två också sanna.

(a) $\mathbf{F}$ är konservativt i D

(b) $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten styckvis glatt kurva $\mathcal{C}$ i D.

(c) Om $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$ är två kurvor i D med gemensamma start- och slutpunkter så är $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Adams 15.4, tma043 V5, Ht08 bild 18

OBS! Om $\mathbf{F}$ är konservativt med potential ϕ och $\mathcal{C}_1$ har startpunkt P_0 och slutpunkt P_1 så är

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(P_1) - \phi(P_0)$$

OBS 2 Med fysikens potentialbegrepp där alltså $-\phi$ är potentialfunktionen har vi istället

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(P_0) - \phi(P_1)$$

Detta stämmer bättre med t.ex. definitionen i NE: *potential*, det arbete som krävs för att förflytta en massenhet, en positiv enhetsladdning eller en magnetisk enhetspol från oändligt avstånd från ett konservativt kraftfälts källor till en punkt i kraftfältet (gravitationsfält, elektrostatiskt eller magnetiskt fält).

Potentialskillnaden är det arbete som *krävs* för förflyttningen. Kurvintegralen är det arbete fältet *utför*.

Adams 15.4, tma043 V5, Ht08 bild 19

En parametriserad yta i rummet är en kontinuerlig funktion $\mathbf{r}$ definierad på en rektangel $R = \{(uv) : a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d\}$ (eller annat slutet begränsat område med väldefinierad area) i uv-planet och med värden i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad (u, v) \in R$$

Här tänker vi oftast på $x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$ som koordinaterna för *punkten* (x, y, z). Dessutom uppfattar vi oftast *värdemängden* för $\mathbf{r}(u, v)$ som den parametriserade ytan, inte funktionen själv.

Adams 15.5, tma043 V5, Ht08 bild 20

Notera att alla punkter på ytan är randpunkter eftersom ytan är ett tvådimensionellt objekt i $\mathbb{R}^3$. Punkter på ytan som motsvaras av inre punkter i området R kallas trots detta inre punkter på ytan.

Randen till området R avbildas ibland, men inte alltid på en kurva som avgränsar ytan. Den kurvan kallas i så fall för *ytans rand*.

Adams 15.5, tma043 V5, Ht08 bild 21

Om ytan beskrivs geometriskt och vi skall hitta/ge en parametrisering av ytan så kräver vi att den (funktionen) skall vara en-entydig utom möjligen på randen till området R.

Adams 15.5, tma043 V5, Ht08 bild 22

En yta kallas glatt om det finns ett tangentplan i varje punkt (utom i randpunkterna)

Ytan kallas *styckvis glatt* om den är sammansatt av glatta ytor, "hopklistrade" längs randkurvor.
Definition 5 i boken säger att en punktmängd S i $\mathbb{R}^3$ är en glatt yta om den lokalt är nivåyta till en glatt funktion g med normalvektor $\nabla g \neq \mathbf{0}$.

En parametriserad yta är glatt om funktionen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s,t)$ som ger parametriseringen är glatt och $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \neq \mathbf{0}$ för alla s och t.

Ett infinitesimalt ytelement har arean $dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv$.

En normalvektor till ytan i punkten $\mathbf{r}(u,v)$ ges av

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathbf{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\mathbf{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathbf{k}$$

$$\text{Arean av ytan } \mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}} dS = \iint_R \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv$$

Ytintegralen av en funktion $f(x,y,z)$ över ytan $\mathcal{S}$ ges av integralen

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)dS = \iint_R f(x(uv), y(u,v), z(u,v)) \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv$$

En yta $\mathcal{S}$ kallas *orienterbar* om det finns ett enhetsvektorfält $\hat{\mathbf{N}}(P)$ definierat och kontinuerligt på $\mathcal{S}$ och i varje punkt ortogonalt mot $\mathcal{S}$. Ett vektorfält som uppfyller dettas kallas för *en orientering av* $\mathcal{S}$.

Om $\mathcal{S}$ är en parametriserad yta med $\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \neq 0$ i alla punkter på ytan, så ger

$$\hat{\mathbf{N}} = \pm \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|}$$

de två möjliga orienteringarna.

Ett vektorfälts *flöde* genom en orienterad yta $\mathcal{S}$ ges av ytintegralen

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \quad \text{eller} \quad \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

För parametriserade ytor är

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \pm \iint_{R} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dudv$$

Val av tecken $\pm$ innebär ett val av riktning i vilken flödet uppfattas positivt.

Adams 15.5, tma043 V5, Ht08 bild 26

Ett bokstavsbyte $u \leftrightarrow v$ ger ett teckenbyte i

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} \\
&= \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \mathbf{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \mathbf{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \mathbf{k}
\end{aligned}$$

Vi kan därför utgå från att parametriseringen ger rätt orientering.
Då kan flödesintegralen av
$\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$ skrivas

$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)dydz + g(x,y,z)dzdx + h(x,y,z)dxdy =$

$\iint_D \left(f(x,y,z)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + g(x,y,z)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + h(x,y,z)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) dudv$

Adams 15.5, tma043 V5, Ht08 bild 27