Flervariabelanalys E2, Vecka 6 Ht08

Omfattning 16.1, 16.3 - 16.5 **Innehåll:** Gradient, divergens, rotation, Greens sats/formel, divergenssatsen i två och tre dimensioner, Stokes sats

Mål: För betyget godkänd skall du kunna:

- beräkna *divergens*, div $\mathbf{F}$, och *rotation*, curl $\mathbf{F}$ för ett vektorfält $\mathbf{F}$.
- definiera begreppen källfritt (solenoidal) och virvelfritt (irrotational) vektorfält.
- tillämpa sats 16.2.4
- tillämpa Greens formel (16.3.6) och divergenssatsen (16.3.7 och 16.4.8) i relativt okomplicerade situationer.
- beräkna area av område i planet med hjälp av Greens formel
- beräkna volym av område i rummet med hjälp av divergenssatsen
- tillämpa Stokes sats (16.5.10) i relativt okomplicerade situationer.

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- formulera satsen om divergensen som flödestäthet
- formulera satsen om rotationen som virveltäthet
- formulera och bevisa sats 16.2.3 g) och h)
- formulera och bevisa Greens formel (sats 16.3.6)
- formulera och bevisa divergenssatsen i tre dimensioner (sats 16.4.8)

Om $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ så definieras gradienten genom:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Man kan se

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

som en operator som verkar på f.

Denna operator kan verka även på vektorfält:
Om $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ så är $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ och

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\bullet\mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\bullet(F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{aligned}$$

Adams 16.1, tma043 V6, Ht08 bild 4

Vi har också:

$$\begin{aligned} \operatorname{curl}\mathbf{F} &= \nabla\times\mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\times(F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Adams 16.1, tma043 V6, Ht08 bild 5

Sats 16.3

(g) $\nabla\bullet(\nabla\times\mathbf{F}) = 0$ $(\operatorname{div}\operatorname{curl} = 0)$

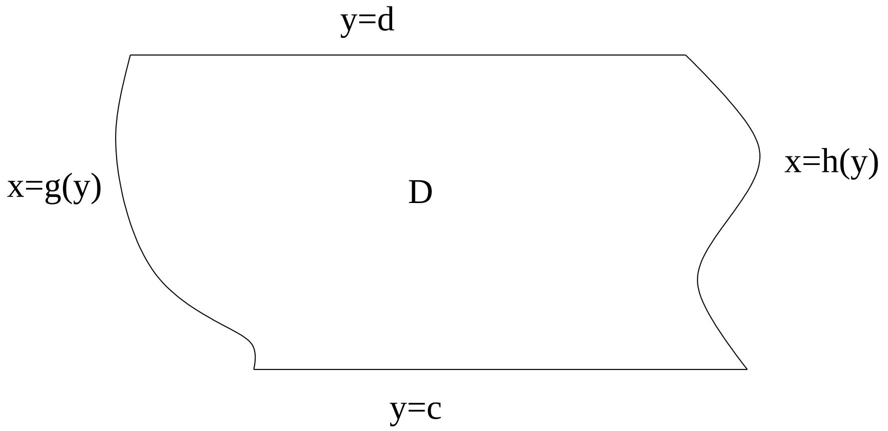
(h) $\nabla\times(\nabla f) = \mathbf{0}$ $(\operatorname{curl}\operatorname{grad} = \mathbf{0})$

Adams 16.2, tma043 V6, Ht08 bild 6

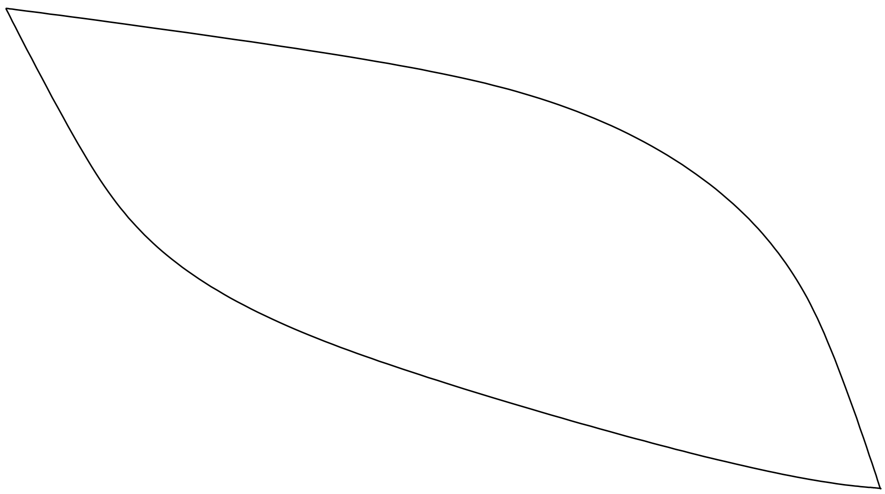
Definition 16.2.2
Ett vektorfält $\mathbf{F}$ kallas *källfritt, divergensfritt, eng: solenoidal* i ett område D om $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ i D.
Ett vektorfält $\mathbf{F}$ kallas *rotationsfritt, eng: irrotational* i ett område D om $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ i D.
Om $\mathbf{F}$ är konservativt så är $\mathbf{F}$ rotationsfritt.
$\operatorname{curl}\mathbf{F}$ är alltid källfritt.

Sats 16.2.4 Om $\mathbf{F}$ är ett glatt, rotationsfritt vektorfält i ett *enkelt sammanhängande* område D så är $\mathbf{F}$ konservativt.
Sats 16.2.5 Om $\mathbf{F}$ är ett glatt, källfritt vektorfält i ett område D med egenskapen att varje sluten yta i D är rand till ett område som ligger helt i D så är
$\mathbf{F} = \operatorname{curl}\mathbf{G}$ för något vektorfält $\mathbf{G}$, definierat i D. Vektorfältet $\mathbf{G}$ kallas vektorpotential till $\mathbf{F}$.

Definition Ett område kallas x-enkelt om det begränsas av linjer $y = a$ och $y = d$ i y-led och kurvor $x = g(y)$ och $x = h(y)$ i x-led.



Definition Ett område kan vara både x-enkelt och y-enkelt:



Ett område kallas reguljärt om det kan delas i ändligt många x- och y-enkla delområden.

Sats 16.3.6 Greens formel
Antag att D är ett reguljärt, slutet område vars rand $\mathcal{C}$ består av en eller flera styckvis glatta slutna kurvor utan dubbelpunkter, positivt orienterade relativt D.
Antag också att $\mathbf{F} = F_1(x,y)\mathbf{i} + F_2(x,y)\mathbf{j}$ är ett glatt vektorfält definierat i D.
Då gäller:

$$\oint_{\mathcal{C}} F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$$

Area som kurvintegral
Antag att $\mathcal{C}$ är den positivt orienterade randen till D. Då gäller:

$$\oint_{\mathcal{C}} xdy = -\oint_{\mathcal{C}} ydx = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} xdy - ydx = \text{ Arean av } D$$

Sats 16.3.7 Divergenssatsen i $\mathbb{R}^2$
Antag att området D och dess rand $\mathcal{C}$ och vektorfältet $\mathbf{F} = F_1(x,y)\mathbf{i} + F_2(x,y)\mathbf{j}$ uppfyller villkoren i Greens formel. Antag också att $\hat{\mathbf{N}}$ är det utåtriktade enhetsnormalvektorfältet till $\mathcal{C}$.
Då gäller:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} dA = \iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dA$$

Adams 16.3, tma043 V6, Ht08 bild 13

Sats 16.4.8 Gauss divergenssats. Antag att D är ett tredimensionellt reguljärt område vars rand $\mathcal{S}$ är en orienterad sluten yta med enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$ riktad ut från D. Antag också att $\mathbf{F}$ är ett glatt vektorfält på D. Då gäller:

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \oint\!\!\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} dS$$

Adams 16.4, tma043 V6, Ht08 bild 14

Tolkning av divergensen
Låt D vara en sfär med radie ϵ och centrum i punkten P. Låt $\mathcal{S}$ vara randen med utåtriktad normal. Då gäller:

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \oint\!\!\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} dS$$

och alltså:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \oint\!\!\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}} dS$$

Ytintegralen kan ses som ”flödet ut ur punkten P”.
$\operatorname{div} \mathbf{F}(P)$ tolkas då som “källstyrka per volymsenhet”.

Adams 16.4, tma043 V6, Ht08 bild 15

Sats 16.5.10 Stokes sats
Låt $\mathcal{S}$ vara en styckvis glatt orienterad yta med enhetsnormalvektorfält $\hat{\mathbf{N}}$.

Antag att randen $\mathcal{C}$ till $\mathcal{S}$ består av en eller flera styckvis glatta, slutna kurvor, positivt orienterade relativt orienteringen av $\mathcal{S}$. (Detta innebär ungefär att $\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{T}}$ pekar in i ytan.)

Antag också att $\mathbf{F}$ är ett glatt vektorfält på en öppen mängd D som innehåller $\mathcal{S}$.

Då gäller:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\operatorname{curl}\mathbf{F})\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS$$

Tolkning av rotationen
Låt $\mathcal{S}$ vara en cirkelskiva med radie ϵ och centrum i punkten P och normalvektor $\hat{\mathbf{N}}$.

Låt $\mathcal{C}$ vara randcirkeln genomlöpt moturs sett från spetsen av $\hat{\mathbf{N}}$.

Då gäller:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\operatorname{curl}\mathbf{F})\bullet\hat{\mathbf{N}}\,dS \approx \pi\epsilon^2(\operatorname{curl}\mathbf{F}(P))\bullet\hat{\mathbf{N}}$$

och alltså:

$$(\operatorname{curl}\mathbf{F}(P))\bullet\hat{\mathbf{N}} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$$

Kurvintegralen kan tolkas som arbetet vektorfältet $\mathbf{F}$ uträttar då en partikel går runt i den cirkulära banan.
$(\operatorname{curl}\mathbf{F}(P))\bullet\hat{\mathbf{N}}$ kan alltså ses som fältets förmåga/tendens att få en partikel att rotera kring axeln $\hat{\mathbf{N}}$.