MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidanej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 090605 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt:

Lösningar till TMA043/MVE085 Flervariabelanalys E/V2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 08/09 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.** (14p)

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.** Motivera och förklara så väl du kan.

2. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = xy^2$ på området $D = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$. (6p)

3. (a) Beräkna $\iint_D xy^2 dA$ då D är det ändliga området i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $x = y^2$. (3p)

   (b) Beräkna $\iint_D xy^2 dA$ med hjälp av polära koordinater då $D = \{(x,y) : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 4\}$. (3p)

4. (a) Förklara hur man beräknar flödet, $\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{x})\bullet\hat{\mathbf{N}}dS$, av vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z)$ genom en orienterad yta $\mathcal{S}$ som ges av en parametrisering, $(x,y,z) = \mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$, och enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$. (2p)

   (b) Låt $\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$. Beräkna flödet av $\operatorname{curl}\mathbf{F}$ upp genom paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$. (4p)

Del 2: Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Definiera vad som menas med att en funktion är differentierbar i punkten (a,b) och avgör om funktionen f, som ges av $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ då $(x,y) \neq (0,0)$ och $f(0,0) = 0$ är differentierbar i hela $\mathbb{R}^2$. (6p)

6. Beräkna $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$, där D ges av olikheten $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$. (6p)

7. Formulera satsen om kurvintegralers oberoende av vägen. Bevisa att, under satsens villkor, gäller det att om $\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ endast beror på kurvans startpunkt och slutpunkt så är $\mathbf{F}$ konservativt. (6p)

Anonym kod	Lösningar till TMA043/MVE085 Flervariabelanalys E/V2 090605	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas samt svar anges, på anvisad plats. (Endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas.)

(a) Avgör om vektorfältet $\mathbf{F}(x,y) = (xy, x)$ är konservativt och beräkna de två kurvintegralerna $\int_{C_i} xy\,dx + x\,dy$, $i = 1,2$ där C_1 är kurvan $x = y$ och C_2 är kurvan $x = t^2$, $y = t^3$, båda från $(0,0)$ till $(1,1)$. (3p)

Lösning: $\frac{\partial}{\partial y}(xy) = x$, $\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \neq \frac{\partial}{\partial y}(xy) \Rightarrow \bar{F}$ är inte konservativt

$\int_{C_1} xy\,dx + x\,dy = \left\{ \begin{matrix} C_1: x = y \\ 0 \to 1 \end{matrix} \right\} = \int_0^1 (x^2 + x)\,dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

$\int_{C_2} xy\,dx + x\,dy = \left\{ \begin{matrix} C_2: & x = t^2, dx = 2t\,dt \\ & y = t^3, dy = 3t^2\,dt \\ & 0 \to t \to 1 \end{matrix} \right\} = \int_0^1 (t^2 \cdot t^3 \cdot 2t + t^2 \cdot 3t^2)\,dt =$

$= \int_0^1 (2t^6 + 3t^4)\,dt = \frac{2}{7} + \frac{3}{5}$

Svar: $\bar{F}$ är inte konservativt, $\int_{C_1} \bar{F} \bullet d\bar{r} = \frac{5}{6}$, $\int_{C_2} \bar{F} \bullet d\bar{r} = \frac{31}{35}$

(b) Beräkna riktningsderivatan $f_{\mathbf{v}}(-1,2)$ då $\mathbf{v} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ och $f(x,y) = \ln(1 + 2x + y)$. Ange $\mathbf{u}$ så att $f_{\mathbf{u}}(-1,2)$ är så liten som möjligt. (3p)

Lösning: $\nabla f = \frac{2}{1+2x+y}\bar{i} + \frac{1}{1+2x+y}\bar{j}$, $\nabla f(-1,2) = 2\bar{i} + \bar{j}$

$f_{\bar{v}}(-1,2) = \nabla f(-1,2) \bullet \bar{v} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f_{\bar{u}}(-1,2)$ är minimal då $\bar{u} = -\frac{\nabla f(-1,2)}{\|\nabla f(-1,2)\|} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\bar{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{j}$

Svar: $f_{\bar{v}}(-1,2) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\bar{u} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\bar{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{j}$ $\left(f_{\bar{u}} = -\sqrt{5}\right)$

(c) Beräkna $\nabla h(-1,2)$ då $h(x,y) = f(x^2y, x+y)$ och $\nabla f(2,1) = (a,b)$. (3p)

Lösning: $h_1(-1,2) = h_1(x,y)\Big|_{(x,y)=(-1,2)} = f_1(x^2y, x+y)\frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + f_2(x^2y, x+y)\frac{\partial}{\partial x}(x+y)\Big|_{(-1,2)}$

$= f_1(2,1)\, 2xy\Big|_{(-1,2)} + f_2(2,1) = -4a + b$

$h_2(-1,2) = f_1(2,1) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) + f_2(2,1)\frac{\partial}{\partial y}(x+y)\Big|_{(-1,2)} = a + b$

Svar: $\nabla h(-1,2) = (-4a+b)\bar{i} + (a+b)\bar{j}$

VÄND!

(d) Avgör, för var och en av mängderna $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 4\}$, $B = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$ och $C = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 4\}$ om den är öppen, sluten eller ingetdera. Ange en inre punkt, en yttre punkt och en randpunkt till B. (2p)

Lösning:

Svar: A öppen, B ingetdera, C sluten, (1,1) inre, (2,2) yttre, (2,0) randpunkt

(e) Ange Jacobimatrisen $D\mathbf{g}(x,y)$ till funktionen från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som ges av $\mathbf{g}(x,y) = (x^2y, x+y)$. Beräkna, med hjälp av $D\mathbf{g}(-1,2)$, ett approximativt värde på $\mathbf{g}(-0.9,\ 2.01)$ (alltså på $\mathbf{g}(-1+h, 2+k)$ då $h = 0.1$ och $k = 0.01$). (3p)

Lösning: $D\bar{g}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad D\bar{g}(-1,2) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} g_1(-1+h, 2+k) \\ g_2(-1+h, 2+k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1(-1,2) \\ g_2(-1,2) \end{bmatrix} \approx D_g(-1,2)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4h + k \\ h + k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.39 \\ 0.11 \end{bmatrix}$$

$$\bar{g}(-0{,}9, 2.01) \approx \bar{g}(-1,2) + (-0{,}39, 0{,}11) = (2,1) + (-0.39, 0.11) = (1.61, 1.11)$$

Svar: $D\bar{g}(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \bar{g}(-0{,}9, 2.01) \approx (1{,}61, 1{,}11)$

TMA043 / MVE085 090605

2. f är kontinuerlig på det slutna, begränsade området D och har därför största o minsta värde på D. Dessa erhålls i punkter där $\nabla f = \bar{0}$ eller i punkter på randen till D. I D är $f(x,y) \geq 0$ med likhet då $x=0$ eller $y=0$.

Minsta värdet är alltså 0 och erhålls på randkurvorna $x=0,\ 0 \leq y \leq 2$ och $0 \leq x \leq 2,\ y=0$.

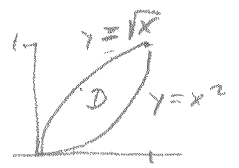
$$\nabla f = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \quad (x,0) \text{ randpunkter}$$

Största värdet erhålls i punkt där $x^2+y^2=4$, $0 \leq x$

$$f(x, \sqrt{4-x^2}) = x(4-x^2) = g(x), \quad g'(x) = 4-3x^2$$

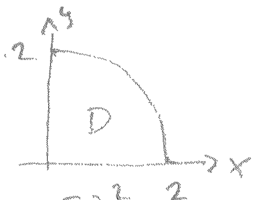
x	0		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{16}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

Största värdet är $\frac{16}{3\sqrt{3}}$. minsta är 0

3. a) 

$$\iint_D xy^2\,dA = \int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=y^2}^{\sqrt{y}} xy^2\,dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2y^2}{2} \right]_{x=y^2}^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \frac{1}{2}(y^3 - y^6)\,dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) = \frac{3}{56}$$

b) 

$$\iint_D xy^2\,dA = \int_{r=0}^{2} \left(\int_{v=0}^{\pi/2} r^4 \cos v \sin^2 v\,dv \right) dr$$

$$= \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^2 \cdot \left[\frac{\sin^3 v}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{32}{15}$$

4. a) $\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) \bullet d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \bullet (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)\, du\,dv$

om $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ och $\hat{N}$ är lika riktade

Annars

$\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) \bullet d\mathbf{S} = -\iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \bullet (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)\, du\,dv$

b) $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

Paraboloiden parametriseras av

$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 1 - x^2 - y^2 \end{cases} \quad (x,y) \in D:\ x^2+y^2 \leq 1$

$\mathbf{r}'_x = \mathbf{i} - 2x\mathbf{k} \quad \mathbf{r}'_y = \mathbf{j} - 2y\mathbf{k} \quad \mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iint_D (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) \bullet (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\, dx\,dy =$

$\iint_D (2x + 2y + 1)\, dx\,dy = \iint_D 1\, dx\,dy = \pi$ ty $\iint_D x\, dx\,dy = 0 = \iint_D y\, dx\,dy$ av symmetriskäl

Eller Enligt Stokes sats är

$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ där C är randen till S orienterad moturs sett från spetsen av $\hat{N}$

I detta fall cirkeln $x^2+y^2=1, z=0$ med positiv orientering.

$\int_C \mathbf{F}(x,y,z) \bullet d\mathbf{r} = \int_C 0\,dx + x\,dy = \int_C x\,dy$

Med Greens formel fås

$\int_C x\,dy = \iint_D dx\,dy = \pi$ då $D: x^2+y^2 \leq 1$.

5. f är differentierbar i (a,b) om och endast om

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-hf_1(a,b)-kf_2(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_1(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_2(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$

$$f(0+h,0+k) - f(0,0) - hf_1(0,0) - kf_2(0,0) = \frac{\sin(hk)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-hf_1(0,0)-kf_1(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sin(hk)}{h^2+k^2}$$

sätt $g(h,k) = \frac{\sin(hk)}{h^2+k^2}$

Då har vi $\begin{cases} g(h,0) = 0 \\ g(h,h) = \frac{\sin(h^2)}{2h^2} \longrightarrow \frac{1}{2} \end{cases}$ $\lim_{h\to 0} g(h,0) = 0$ då $h\to 0$

$\lim_{(h,k)\to(0,0)} g(h,k)$ existerar inke

f är <u>inte</u> differentierbar i $(0,0)$

6 $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, \cancel{dxdydz}$ D: $x^2+y^2+z^2 \le z$

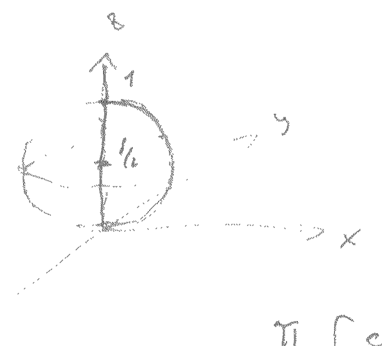
sfäriska koordinater $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$

$dxdydz = r^2\sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$

$x^2+y^2+z^2 \le z \Leftrightarrow r^2 \le r\cos\varphi \Leftrightarrow r \le \cos\varphi$

$x^2+y^2+z^2 \le z \Leftrightarrow x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2 \le (\frac{1}{2})^2$

D är en sfär med radie $\frac{1}{2}$ och centrum $(0,0,\frac{1}{2})$



$D \Leftrightarrow E$: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 < r \le \cos\varphi \\ 0 < \theta \le 2\pi \end{cases}$

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dV = \iiint_E r^3 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^{\cos\varphi} r^3 \sin\varphi\, dr \right) d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4\varphi}{4} \sin\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{\cos^5\varphi}{5} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{10}$$