Preliminära lösningsförslag till TMV015 2004-06-02

1. S, S, S, S, S, S, S

2. Nollrummet för $A(\alpha)$:

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha & 4 \end{bmatrix} \quad \boxed{-1}\ \boxed{-2}\ \boxed{-3} \quad \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & 8 & -8 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & \alpha - 15 & -20 \end{bmatrix} \quad \boxed{-1}\ \boxed{-5} \quad \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -15 & \alpha + 10 & 15 \end{bmatrix} \quad \boxed{5} \quad \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ligger i nollrummet för $A(\alpha)$ om och endast om

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 0 \\ \quad - x_2 + 5x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0 \\ \qquad 3x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ \qquad\quad (\alpha - 5)x_4 = 0 \end{cases}$$

$\alpha = 5:$ $\quad x_4, x_5$ fria parametrar

$$\begin{cases} x_1 = 4t + 3(s+t) - 5s - 8t = -2s - t \\ x_2 = 5(s+t) - 5s - 7t = -2t \\ x_3 = s + t \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases}$$

Alltså $(-2, 0, 1, 1, 0), (-1, -2, 1, 0, 1)$ ger en bas för nollrummet.

$\alpha \neq 5:$ $\quad x_5$ fri parametrar

$$\begin{cases} x_1 = 4t + 3t - 8t = -t \\ x_2 = 5t - 7t = -2t \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \\ x_5 = t \end{cases}$$

Alltså $(-1, -2, 1, 0, 1)$ ger en bas för nollrummet.

Kolonnrummet för $A(\alpha)$: En bas ges av de kolonner A som står i de kolonner i den radekvivalenta trappstegsmatrisen med pirotelement, dvs.
$\alpha = 5 : (1, 1, 2, 3), (2, 1, 3, 1)$ och $(-3, 2, 2, 1)$
$\alpha \neq 5 : (1, 1, 2, 3), (2, 1, 3, 1), (-3, 2, 2, 1)$ och $(5, 0, 2, \alpha)$.

Svar: se ovan.

3. 1) Sätt $g(x, y, z) = \sin z + xz + xy$. Det sökta tangentplanet ges av $\nabla g(0, 0, \pi) \cdot (x, y, z - \pi) = 0$. Här är $\nabla g(x, y, z) = (y + z, x, \cos z + x)$ och $\nabla g(0, 0, \pi) = (\pi, 0, -1)$. Vi får då svaret $\pi x - z + \pi = 0$.

   2) Från implicit funktionssatsen följer att nivåytan $g(x, y, z) = 0$ lokalt kring $(0, 0, \pi)$ ges som en funktionsyta $z = z(x, y)$. Då tangentplanet till nivåytan i $(0, 0, \pi)$ sammanfaller med tangentplanet till funktionsytan $z = z(x, y)$ i $(0, 0, \pi)$ kan vi direkt identifiera

$$\begin{cases} z'_x(0,0) = \pi \\ z'_y(0,0) = 0 \end{cases} \qquad \text{(kan även fås via implicit derivering.)}$$

Implicit derivering m.a.p. x respektive y ger

$$\begin{cases} \cos z \cdot z'_x + z + xz'_x + y = 0 \\ \cos z \cdot z'_y + xz'_y + x = 0 \end{cases}$$

och

$$\begin{cases} -\sin z \cdot (z'_x)^2 + \cos z \cdot z''_{xx} + 2z'_x + x \cdot z''_{xx} = 0 \\ -\sin z \cdot z'_y \cdot z'_x + \cos z \cdot z''_{xy} + z'_y + x \cdot z''_{xy} + 1 = 0 \\ -\sin z \cdot (z'_y)^2 + \cos z \cdot z''_{yy} + x \cdot z''_{yy} = 0 \end{cases}$$

Insättning av $(x, y, z) = (0, 0, \pi)$ ger

$$\begin{cases} -z''_{xx}(0,0) + 2\pi = 0 \\ -z''_{xy}(0,0) + 1 = 0 \\ -z''_{yy}(0,0) = 0 \end{cases}$$

Detta ger det sökta Taylorpolynomet

$$P(x,y) = z(0,0) + z'_x(0,0)x + z'_y(0,0)y + \frac{1}{2}(z''_{xx}(0,0)x^2 + \\ + 2z''_{xy}(0,0)xy + z''_{yy}(0,0)y^2) = \pi + \pi x + \pi x^2 + xy.$$

Svar:

1) $z = \pi + \pi x$
2) $P(x, y) = \pi + \pi x + \pi x^2 + xy$

4. Differentialekvationen:

$$y^2 f''_{xy} + 2yx^3 f''_{yy} - 2x^3 f'_y = 4xy^3,\ \ x > 0, y > 0$$

ska transformeras. Sätt $u(x,y) = x^4 - y^2, v(x,y) = x^2$ och $f = f(u(x,y), v(x,y))$ samt tillämpa kedjeregeln.

Detta ger

$$\begin{aligned}
f'_x &= f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = f_u \cdot 4x^3 + f'_v \cdot 2x \\
f'_y &= f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = -f'_u \cdot 2y \\
f''_{yy} &= -2f'_u - 2y(f''_{uu} \cdot u'_y + f''_{uv} \cdot v'_y) = \\
&= -2f'_u - 2y(f''_{uu} \cdot (-2y)) = \\
&= -2f'_u + 4y^2 f''_{uu} \\
f''_{xy} &= 4x^3(f''_{uu} \cdot u'_y + f''_{uv} \cdot v'_y) + 2x(f''_{vu} \cdot u'_y + f''_{vv} \cdot v'_y) = \\
&= -8x^3 y f''_{uu} - 4xy f''_{vu}
\end{aligned}$$

Insättning i differentiallekvationen ger

$$\begin{aligned}
&y^2(-8x^3 y f''_{uu} - 4xy f''_{vu}) + 2yx^3(-2f'_u + 4y^2 f''_{uu}) - \\
&- 2x^3(-2y f'_u) = 4xy^3
\end{aligned}$$

dvs.

$$(-8x^3y^3 + 8x^3y^3) f''_{uu} - 4xy^3 f''_{vu} + (-4yx^3 + 4yx^3) f'_u = 4xy^3$$

dvs.

$$f''_{vu} = -1$$

då $x > 0, y > 0$.

Integration m.a.p. u ger

$$f'_v = -u + g(v)$$

där g är en deriverbar funktion. Integration m.a.p. v ger

$$f = -uv + G(v) + H(u)$$

där H är en deriverbar funktion och G är en primitiv funktion till g. Insättning av x och y ger

$$f(x,y) = -(x^4 - y^2)x^2 + G(x^2) + H(x^4 - y^2)$$

Villkoret $f(x,x) = x^4, x > 0$ ger

$$x^4 = -(x^4 - x^2)x^2 + G(x^2) + H(x^4 - x^2)$$

dvs

$$G(x^2) = x^6 - H(x^4 - x^2)$$

vilket ger

$$G(x) = x^3 - H(x^2 - x).$$

Vi får nu

Svar: $f(x,y) = x^2y^2 + H(x^4 - y^2) - H(x^4 - x^2)$ där H är en godtycklig reellvärd funktion i C^2.

5. x, y, z är vinklarna i en triangel vilket medför att $z = \pi - x - y$ där $x, y, z > 0$. Då $\{(x,y,z) : x \geq 0, y \geq 0, z = \pi - x - y \geq 0\}$ är en kompakt mängd och $f(x,y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(\pi - x - y)$ är en kontinuerlig funktion antas det största värdet. (Vi har inkluderat urartade trianglar men dessa kommer alla att ger $\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z = 0$.)

   Maximera nu $f(x,y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(\pi - x - y)$ över mängden $K = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, \pi - x - y \geq 0\}$.

   Rita själv en passande figur!!

   Stationära punkter till f i det inre av K:

$$\begin{cases} 0 = f'_x = \cos x \cdot \sin y \cdot \sin(\pi - x - y) - \sin x \sin y \cos(\pi - x - y) \\ 0 = f'_y = \sin x \cos y \cdot \sin(\pi - x - y) - \sin x \sin y \cos(\pi - x - y) \end{cases}$$

   och den sökta ligger i det inre av K (dvs. $x > 0, y > 0, \pi - x - y > 0$) uppfyller

$$\begin{cases} \cos x \sin y = \sin x \cos y \\ \cos x \sin(\pi - x - y) = \sin x \cos(\pi - x - y) \end{cases}$$

   dvs

$$\begin{cases} x = y \qquad (\text{obs. } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi - x - y = 0) \\ \cos x \sin(\pi - 2x) = \sin x \cos(\pi - 2x) \end{cases}$$

   dvs

$$x = y = \frac{\pi}{3}$$

   På ∂K gäller $f(x,y) = 0$. Vidare har vi

$$f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = (\sin\frac{\pi}{3})^3 = (\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = \frac{3}{8}\sqrt{3}.$$

Svar: $\frac{3}{8}\sqrt{3}$.

Alternativ: Använd Lagranges multiplikatormetod.

6. Parametrisering av γ med vinkeln θ ger

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\theta) &= (\cos\theta, \sin\theta) \qquad\qquad \text{vilket medför} \\ \mathbf{r}'(\theta) &= (-\sin\theta, \cos\theta) \end{aligned}$$

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_0^{2\pi} (P(\cos\theta, \sin\theta), Q(\cos\theta, \sin\theta))\cdot$$

$$\cdot\, \mathbf{r}'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-\sin\theta P(\cos\theta,\sin\theta) + \cos\theta Q(\cos\theta,\sin\theta))}_{\substack{=1 \text{ enligt antagandet att} \\ xQ(x,y) - yP(x,y) = 1}}$$

$$= 2\pi.$$

Svar: 2π