Lösningsförslag till tentamen TMV015 2004-08-23

1. 15, 2F, 3S, 4F, 6S, 7F

2. $A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$ är en 3×4-matris.

   Dimensionssatsen ger att rang A+nolldim $A = 4$ och om rang $A =$ nodedim A så måste rang $A = 2$. För att bestämma rang A utförs elementära radoperationer på A enligt följande:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4+\alpha \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\alpha \end{bmatrix} \equiv G.$$

   Då rang $A =$ antalet pirofelement i G, måste $\alpha = -1$ för all rang $A = 2$.

   Svar: $\alpha = -1$

3. a) Sätt $F(x,y,z) = \sin z + xyz$. Det sökta tangentplanet ges av

$$F'_x(0,0,\pi)x + F'_y(0,0,\pi)y + F'_z(0,0,\pi)\cdot(z-\pi) = 0$$

   dvs

$$z = \pi.$$

   b) Implicit derivering av $\sin z + xyz = 0$ ger

$$\begin{aligned} \cos z \cdot z'_x + yz + xyz'_x &= 0 \\ \cos z \cdot z'_y + xz + xyz'_y &= 0 \end{aligned}$$

   och vidare

$$\begin{aligned} -\sin z \cdot (z'_x)^2 + \cos z \cdot z''_{xx} + 2yz'_x + xyz''_{xx} &= 0 \\ -\sin z \cdot (z'_y)^2 + \cos z \cdot z''_{yy} + 2xz'_y + xyz''_{yy} &= 0 \\ -\sin z \cdot z'_x x'_y + \cos z \cdot z''_{xy} + z + yz'_y + xz'_x + xyz'_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

   Insättning av $x = y = 0$ och $z(0,0) = \pi$ ger

$$\begin{aligned} &z'_x(0,0) = z'_y(0,0) = 0 \\ &z'_{xx}(0,0) = x''_{yy}(0,0) = 0,\ z''_{xy}(0,0) = \pi \end{aligned}$$

   Det sökta Taylorpolynomet är

$$P(x,y) = \pi + \frac{1}{2}2\pi \cdot xy = \pi(1+xy)$$

   Svar: a) $z = \pi$ b) $P(x,y) = \pi(1+xy)$

4. Derivering med kedjeregeln ger

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx} f(\frac{\sin x}{2},\ f(x,x^2)) = \\
&= f'_u(\frac{\sin x}{2},\ f(x,x^2)) \cdot \frac{\cos x}{2} + f'_v(\frac{\sin x}{2},\ f(x,x^2)) \cdot \\
&\cdot \frac{d}{dx} f(x,x^2).
\end{aligned}$$

där

$$\frac{d}{dx} f(x,x^2) = f'_u(x,x^2) + f'_v(x,x^2) \cdot 2x$$

Insättning av $x = 0$ ger

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx} f(\frac{\sin x}{2},\ f(x,x^2))|_{x=0} \\
&= f'_u(0,0) \cdot \frac{1}{2} + f'_v(0,0) \cdot (f'_u(0,0) + f'_v(0,0) \cdot 0) = \\
&= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

där vi utnyttjad villkoren $f(0,0) = 0,\ f'_u(0,0) = f'_v(0,0) = 1$.

Svar: $\frac{3}{2}$

5. Då ellipsen är en kompakt mängd i $\mathbb{R}^3$ har vi att största och minsta värdet av f existerar och antas i punkter där $\nabla f, \nabla g_1, \nabla g_2$ är linjärt beroende där $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 8$ och $g_2(x,y,z) = x + y + z - 1$.

   Dessa punkter uppfyller

$$0 = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_{1x} & g'_{1y} & g'_{1z} \\ g'_{2x} & g'_{2y} & g'_{2z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(y-x)$$

   dvs $(2,2,-3)$ och $(-2,-2,5)$. Detta ger största värdet $f(2,2,-3) = 7$ och minsta värdet $f(-2,-2,5) = -1$.

   Svar: $7, -1$

6. Kurvan $r = a(1+\cos\theta)$, $0 \le \theta < 2\pi$, är parametriserad med θ varför vi får

$$\begin{cases} x(\theta) = r\cos\theta = a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = r\sin\theta = a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

och totala längden ges av

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} d\theta = \ldots =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2 \sin^2\theta} d\theta =$$

$$= |a| \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta} d\theta =$$

$$= \sqrt{2}|a| \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos\theta} d\theta = \left\{ \begin{array}{l} t = \tan\frac{\theta}{2} \text{ ger} \\ d\theta = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right. =$$

$$= 2|a| \cdot 2 \lim_{N\to\infty} \int_0^N \frac{2dt}{(1+t^2)^{3/2}} = 8|a| \lim_{N\to\infty} \int_0^N \frac{dy}{(1+t^2)^{3/2}} =$$

$$= 8|a| \lim_{N\to\infty} \int_0^N \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^{3/2}} dt =$$

$$= 8|a| \lim_{N\to\infty} \{ \int_0^N \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + \int_0^N t \cdot \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \} =$$

$$= 8|a| \lim_{N\to\infty} \{ \int_0^N \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + \left[t \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right]_0^N - \int_0^N \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \} = 8|a|.$$