TMA043 Flervariabelanalys E2, ht 08
Vecko–PM läsvecka 3

Adams: 12.7 - 12.9 13.1-13.3, 13.6

Innehåll:

Gradient och riktningsderivata, implicita funktioner, Taylorserier, extremvärden, extremvärde med bivillkor, Lagranges multiplikatormetod, Newtons metod för ekvationssystem.

Mål:

För betyget godkänd skall du kunna:

- beräkna gradient och riktningsderivata till en funktion av två eller tre variabler och utnyttja deras egenskaper (sats 12.7.6 och s 683, 686, 687) vid problemlösning.
- beräkna taylorpolynom till funktioner av två variabler, både genom att utgå från Taylors formel och genom att utnyttja kända Taylorpolynom i en variabel.
- förklara vad som menas med lokalt maximum (minimum), sadelpunkt, globalt maximum (minimum), kritisk/stationär punkt (critical point) och singulär punkt med matematisk text, egna ord eller exempel.
- bestämma kritiska/stationära punkter för en funktion $f(x, y)$ där ekvationssystemet $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ är relativt enkelt och klassificera de kritiska punkterna med hjälp av sats 13.1.3 (rem. s 712).
- utnyttja sats 13.1.1 för att bestämma största och minsta värde på kompakt mängd för en funktion $f(x, y)$ sådan att det är relativt enkelt att bestämma kritiska punkter samt största/minsta värde på områdets rand.
- bestämma extremvärden för en funktion $f(x, y)$, eller $f(x, y, z)$ under bivillkor $g(x, y) = 0$, eller $g(x, y, z) = 0$, med Lagranges multiplikator-metod då den leder till relativt enkelt ekvationssystem.
- lösa ickelinjära ekvationssystem med bl.a. Newtons metod och och optimera funktioner med bl.a. gradientmetoden (Matlab)

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- definiera begreppen gradient och riktningsderivata till en funktion, samt redogöra för och bevisa deras egenskaper
- bestämma strömlinjer/ortogonalkurvor till nivåkurvor till funktion av två variabler (se övn 12.7.21e)
- avgöra om en ekvation eller ett system av ekvationer definierar en funktion implicit och, i så fall, beräkna funktionens partiella derivator.

- bestämma taylorpolynom till implicit definierad funktion
- definiera begreppen lokalt maximum (minimum), sadelpunkt, globalt maximum (minimum) och kritisk/stationär punkt (critical point)
- lösa problem enligt godkäntmålen där ekvationssystemen inte är fullt så enkla, eller dimensionen > 2, eller flera bivillkor.

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Teoretiska uppgifter
12.7	3, 7, 11, 27	17, 19, 21, 23	20, 29 SF1, 2, 4, 5, 6
12.8	1, 3, 15	16	25
12.9	1, 5, 7, 11	13	
13.1	3, 5, 7	24, 26, 17	SF3, 7
13.2	1, 5, 7	9, 11	
13.3	3, 5, 9	19, 13 Lös 13.2.11 på många sätt,jfr 23	27
13.6	Matlabövning		

Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska.

SF 1 Låt $f(x, y) = 2x^2 - 6xy + 3y^2$.

Då finns det en enhetsvektor $\mathbf{v}$ så att $f_{\mathbf{v}}(1, 2) = 14$.

SF 2 Om kurvan $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ är deriverbar och funktionen f har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning till punkten $P = \mathbf{r}(t_0)$ samt $f(\mathbf{r}(t)) = 1$ för alla t så gäller att $\mathbf{r}'(t_0) \cdot \nabla f(P) = 0$.

SF 3 Antag att $f(x, y)$ har lokalt minimum i en punkt (a, b).

Då är alltid $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$.

SF 4 Det största värdet av $|f_{\mathbf{v}}(a, b)|$, då $\mathbf{v}$ är en enhetsvektor i planet, erhålls då $\mathbf{v}$ tangerar nivåkurvan till f genom punkten (a, b).

SF 5 Gradienten till $f(x, y)$ i punkten (a, b) är normal till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$.

SF 6 Det största värdet av $|f_{\mathbf{v}}(a, b)|$, då $\mathbf{v}$ är en enhetsvektor i planet, är det största av talen $|f_1'(a, b)|$ och $|f_2'(a, b)|$.

SF 7 Antag att $f(x, y)$ har lokalt maximum i en punkt (a, b).

Då är alltid (a, b) lösning till ekvationssystemet $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$.