TMA043 Flervariabelanalys E2, ht 08
Vecko–PM läsvecka 4

Adams:

14.1 - 14.6

Innehåll:

Dubbel- och trippelintegraler, beräkning med upprepad integrering, generaliserade dubbelintegraler, medelvärdessats för dubbelintegraler, variabelsubstitution i dubbel- och trippelintegraler.

Mål:

För betyget godkänd skall du kunna:

- känna till och utnyttja dubbelintegralens egenskaper (sid 758) vid problemlösning
- beräkna dubbelintegral genom upprepad enkelintegration
- avgöra huruvida en integral är generaliserad och i så fall förklara vad som gör den generaliserad
- beräkna generaliserad dubbelintegral med icke-negativ integrand och därigenom avgöra om den är konvergent eller divergent
- veta vad som menas med medelvärdet av en funktion av två eller tre variabler på ett område
- beräkna dubbelintegraler med hjälp av föreslagen variabelsubstitution
- beräkna trippelintegraler genom upprepad enkelintegration och med hjälp av föreslagen variabelsubstitution

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- förklara vad det innebär att en funktion är integrerbar över ett område i planet (sid 755 och def på sid 756,757) och utnyttja Riemannsummor för att approximera värdet på en integral (ex.1 sid 756,757)
- redogöra för dubbelintegralens egenskaper (sid 758)
- formulera och bevisa medelvärdessatsen för dubbelintegraler.
- känna till vad som menas med att en transformation $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är ett-ett (one to one) och hur man kan använda Implicita funktionssatsen för att avgöra om en transformation är ett-ett (sid 777).
- känna till sambandet mellan Jacobianen till en transformation och Jacobianen till transformationens invers (sid 777)
- formulera satsen om variabelsubstitution i dubbelintegraler (sid 778).
- välja lämplig variabelsubstitution för beräkning av dubbel- eller trippelintegral
- beräkna itererad enkelintegral, med två eller tre variabler, genom att kasta om integrationsordningen.

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Teoretiska uppgifter
14.1	13, 15		
14.2	3, 5, 9, 19	13, 25, 27	30
14.3	3	5, 7, 17, 21	
14.4	3, 9, 13, 21	15, 23, 35	27
14.5	1, 3, 7	11, 19	
14.6	1, 3, 7, 15, 29		

Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska.

SF 1 Om D är kvadraten i xy-planet med hörn i punkterna $(\pm 1, 0)$ och $(0, \pm 1)$ så är av symmetriskäl alltid $\iint_D f(x,y)dxdy = 4\iint_T f(x,y)dxdy$ där T är triangeln med hörn i punkterna $(0,0), (1,0)$ och $(0,1)$

SF 2 För alla integrerbara funktioner $f(x,y)$ gäller att $\int_0^1 \int_y^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^x f(x,y)dydx$

SF 3 Transformationen $x = u^3 - u, y = v$ avbildar området $S : -2 \leq u \leq 2, -2 \leq v \leq 2$ i uv-planet på området $D : -6 \leq x \leq 6, -2 \leq y \leq 2$ i xy-planet och

$$\iint_D y^2 dxdy = \iint_S v^2 \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

SF 4 Integralen $\iint_D (x^2 + y^2)^{\alpha/2} dxdy$, där $D : 0 \leq x \leq \infty, 0 \leq y \leq \infty$, konvergerar om och endast om $\alpha > -2$

SF 5 Om $f(x,y)$ är en positiv och kontinuerlig funktion på ett begränsat område D i xy-planet så är alltid $0 < \iint_D f(x,y)dxdy < \infty$

SF 6 Om $f(x,y)$ är integrerbar på ett begränsat område D i xy-planet så är alltid

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{\mathrm{int}(D)} f(x,y)dxdy$$

SF 7 För alla integrerbara funktioner $f(x,y)$ gäller att $\iint_D (f(x,y))^2 dxdy = \left(\iint_D f(x,y)dydx\right)^2$

SF 8 Om $f(x,y)$ är integrerbar på området $D : 0 \leq x, y \leq 1$ så ger alltid integralen $\iint_D f(x,y)dxdy$ volymen av det område i rummet som begränsas av xy-planet, funktionsytan $z = f(x,y)$ samt planen $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$.

SF 9 Integralen $\iiint_D r^2 \sin\phi \, dr d\phi d\theta$, där $D : 0 \leq r \leq 1, -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ger volymen av enhetsklotet i rummet.