TMA043 Flervariabelanalys E2, ht 08
Vecko–PM läsvecka 5

Adams: Kapitel 15

Innehåll:

Vektorfält, konservativa vektorfält, kurvintegraler, ytor, ytintegraler, flödesintegraler

Mål:

För betyget godkänd skall du kunna:

- skissa ett vektorfält i planet och beräkna fältlinjer till det.
- definiera begreppet *konservativt vektorfält* och beräkna *potential* till ett konservativt fält.
- känna till nödvändiga villkor för att ett vektorfält skall vara konservativt (sid 813) och med hjälp av dessa kunna visa att ett givet vektorfält inte är konservativt.
- förklara sambandet mellan nivåkurvor till en potential och fältlinjerna till ett konservativt vektorfält.
- definiera begreppen *kurvintegral av en funktion* och *kurvintegral av ett vektorfält* och kunna beräkna sådana integraler genom parametrisering av kurvan.
- tillämpa satsen om kurvintegralers oberoende av integrationsvägen.
- definiera begreppen *ytintegral av en funktion över en yta* och *flöde av ett vektorfält genom en orienterad yta* och kunna beräkna sådana integraler och flöden genom parametrisering av ytan.
- tillämpa kurv- och ytintegral för att bestämma t.ex. massa, laddning och tyngdpunkt (se t.ex. övn 15.3.9, 15.5.17 & 15.5.23).

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- definiera begreppen *område, sammanhängande område* och *enkelt samanhängande område.*
- formulera och bevisa satsen om kurvintegralers oberoende av integrationsvägen.
- motivera definitionenrna av begreppen kurvintegral, ytintegral av en funktion över en yta och flöde av ett vektorfält genom en orienterad yta, genom att ge exempel på tillämpning och förklaring av varför respektive integraltyp kan utnyttjas i exemplet.

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Teoretiska uppgifter
15.1	3, 6 (rita fältet, fältlinjer och nivåkurvor till $f(x,y) = x^2 - y$ i samma fig.)		
15.2	3, 5	9	19, 20
15.3	2, 3, 7	9	
15.4	1, 7, 9, 14, 15, 17	22, 23	21
15.5	3, 7, 13	9, 15, 17, 20, 23	
15.6	1, 5, 9	15	17

Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska.

SF 1 Om vektorfältet $\mathbf{F}$ är kontinuerligt i ett område D så finns det en potentialfunktion Φ till $\mathbf{F}$ på D

SF 2 $D : 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 2$ är ett enkelt sammanhängande område i rummet.

SF 3 Eftersom $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x2+y2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x2+y2}\right)$ så är vektorfältet $\mathbf{F}(x,y) = \frac{y}{x2+y2}\mathbf{i} - \frac{x}{x2+y2}\mathbf{j}$ konservativt och därmed är $\oint_{\mathcal{C}} \frac{y}{x2+y2}dx - \frac{x}{x2+y2}dy = 0$ för alla slutna kurvor $\mathcal{C}$ i planet

SF 4 Vektorfältet $\mathbf{F}(x,y) = \frac{x}{x2+y2}\mathbf{i} + \frac{y}{x2+y2}\mathbf{j}$ är konservativt i varje område som inte innehåller origo.

SF 5 Om kurvan $\mathcal{C}$ ges av $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ $, a \xrightarrow{t} b$, och vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z)$ har en potentialfunktion $\Phi(x,y,z)$ i hela $\mathbb{R}^3$ så är $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot d\mathbf{r} = \Phi(\mathbf{r}(b)) - \Phi(\mathbf{r}(a))$

SF 6 Antag att $\mathcal{S}$ är en sluten nivåyta $G(x,y,z) = 0$, där G har kontinuerliga partiella derivator, och att $\mathbf{F}$ är ett vektorfält sådant att $\mathbf{F}(x,y,z) \cdot \nabla G(x,y,z) \neq 0$ för alla $(x,y,z) \in \mathcal{S}$. Då är även det totala flödet av vektorfältet genom ytan $\mathcal{S}$ nollskilt.

SF 7 Tyngdpunkten för en yta (”skal”) är alltid en punkt på ytan.

SF 8 Ytintegralen $\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)dS$ är positiv om $f(x,y,z) > 0$ för alla $(x,y,z) \in \mathcal{S}$