TMA043 Flervariabelanalys E2, ht 08
Vecko–PM läsvecka 6

Adams: 16.1, 16.3 - 16.5

Innehåll:

Gradient, divergens, rotation, Greens sats/formel, divergenssatsen i två och tre dimensioner, Stokes sats

Mål:

För betyget godkänd skall du kunna:

- beräkna *divergens*, $\operatorname{div}\mathbf{F}$, och *rotation*, $\operatorname{curl}\mathbf{F}$ för ett vektorfält $\mathbf{F}$.
- definiera begreppen källfritt (solenoidal) och virvelfritt (irrotational) vektorfält.
- tillämpa sats 16.2.4
- tillämpa Greens formel (16.3.6) och divergenssatsen (16.3.7 och 16.4.8) i relativt okomplicerade situationer.
- beräkna area av område i planet med hjälp av Greens formel
- beräkna volym av område i rummet med hjälp av divergenssatsen
- tillämpa Stokes sats (16.5.10) i relativt okomplicerade situationer.

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- formulera satsen om divergensen som flödestäthet
- formulera satsen om rotationen som virveltäthet
- formulera och bevisa sats 16.2.3 g) och h)
- formulera och bevisa Greens formel (sats 16.3.6)
- formulera och bevisa divergenssatsen i tre dimensioner (sats 16.4.8)

Rekommenderade uppgifter

Med RE16 nedan avses Review Exercises i slutet av kapitel 16.

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Teoretiska uppgifter
16.1	3, 7		
16.2		RE16.7	5h, 7
16.3	1, 3, 5	RE16.3	
16.4	1, 3	5, 15, 17	9
16.5	1, 3	5	

Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska.

SF 1 Om $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ och $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har kontinuerliga partiella derivator så gäller: $f(x, y, z)\,(\nabla \bullet \mathbf{F}(x, y, z)) = \mathbf{F}(x, y, z) \bullet (\nabla f(x, y, z))$.

SF 2 Om $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ och $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har kontinuerliga partiella derivator så gäller: $\nabla \bullet (f(x, y, z)\mathbf{F}(x, y, z)) = f(x, y, z)\,(\nabla \bullet \mathbf{F}(x, y, z)) \Leftrightarrow f(x, y, z)$ är konstant

SF 3 Om $\mathcal{C}$ är cirkelbågen $x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0$ från $(1, 0)$ till $(-1, 0)$ och $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$ så är $\int_{\mathcal{C}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \pi$.

SF 4 Om $\mathcal{C}$ är randen till D moturs så är $\frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} xdy - ydx = D$:s area.

SF 5 Om $\nabla \bullet \mathbf{F} = 0$ och $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ så $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

SF 6 Om ytan $\mathcal{S}$ är randen till området D i rummet och $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ så är $\frac{1}{3} \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = V$ där V är D:s volym.

SF 7 Om $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator och ytan $\mathcal{S}$ med enhetsnormal $\mathbf{n}$ har randen $\mathcal{C}$ så gäller: $\iint_{\mathcal{S}} (\nabla f \times \nabla g) \bullet \mathbf{n} dS = \oint_{\mathcal{C}} f \nabla g \bullet d\mathbf{r}$