MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat formelblad, utdelad ordlista, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2008-01-18 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt:Ragnar Freij
tel. 0762-721860

Flervariabelanalys E2 (tma043)

Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv **tentamenskoden** på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 07/08 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida 21/1. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Ange en ekvation till tangentplanet till ytan $4x^2 - y^3 + 2z = 1$ i punkten $(-1, 1, -1)$. (2p)

(b) Funktionen $f(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator av första och andra ordningen, f_1, f_2, f_{11}, f_{22} och $f_{12} = f_{21}$. (3p)
Ange de partiella derivatorna $\frac{\partial}{\partial u} f(x(u, v), y(u, v))$ och $\frac{\partial^2}{\partial u^2} f(x(u, v), y(u, v))$ då $x(u, v) = 2u + 5v$ och $y(u, v) = 3u - v$.

(c) Ange en integral för beräkning av längden av kurvan (2p)
$x = 2t^2, \quad y = t^3, \quad 0 \leq t \leq 1$.
Beräkna längden.

(d) Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} x ds$ då $\mathcal{C}$ är kurvan $x = 2t^2, \quad y = t^3, \quad 0 \leq t \leq 1$. (2p)

(e) Beräkna $\iint_D (x - y) dA$ då $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \ x \leq y \leq 1\}$. (2p)

(f) Ange ett approximativt värde till funktionen $f(x, y) = 3x^3 - 12xy + 2y^2$ i punkten $(1.1, \ 1.01)$ med hjälp av differentialen till f. (2p)

(g) Vilken/vilka av punkterna $(0, 0)$, $(15, -5)$, $(-15, 5)$, $(15, 5)$ är kritisk (stationär) punkt för funktionen $f(x, y) = (2x + y^2)^2 + (x + 5y)^2$? (3p)
Ange, för var och en av de kritiska punkterna (bland punkterna ovan), dess karaktär (lokalt max., lokalt min., sadelpunkt).

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverade kalkyler och slutsatser!

2. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} + y$ på triangeln som ges av $0 \leq y \leq x, \quad 1 \leq x \leq 8$. (6p)

3. Ställ upp en kurvintegral för beräkning av arean av det område i xy-planet som ges av $1 \leq xy \leq 3, \quad 1 \leq \dfrac{y}{x} \leq 4, \quad 0 < x, \ 0 < y$. (8p)

Ställ upp en dubbelintegral för beräkning av samma area.

Beräkna dubbelintegralen med hjälp av substitutionen $u = xy, \quad v = \dfrac{y}{x}$.

Beräkna kurvintegralen genom att parametrisera de olika delarna av randkurvan till området. Du får inte använda Greens formel.

4. Beräkna flödet av $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ genom ytan $z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 2$ med normalriktning uppåt ($\mathbf{k}$-koordinaten positiv). (4p)

Var god vänd!

5. Bestäm det största värde kurvintegralen $\oint_\gamma (5x^2y^3 + 3y^5)dx + (5x - 3x^5 - 5x^3y^2)dy$ (4p)
kan anta då γ är en sluten kurva, som inte skär sig själv och som genomlöps precis ett varv moturs.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Eftersom $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) = 0$ så är
$\oint_{\mathcal{C}} \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{y}{x^2+y^2}\,dy = 0$ för alla slutna kurvor $\mathcal{C}$.

(b) Om $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$ och $\lim_{x\to 0} f(x,kx) = 0$ för alla k så är $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

(c) Om $f(x,y)$ har partiella derivator i en punkt (a,b) så är f kontinuerlig i den punkten.

(d) Antag att vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z)$ har kontinuerliga partiella derivator av andra ordningen. Då gäller att $\operatorname{div}\operatorname{curl}\mathbf{F} = 0$.

(e) Om kurvan $\mathcal{C}$ ges av $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \xrightarrow{t} b$ och vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z)$ har en potentialfunktion $\Phi(x,y,z)$ i hela $\mathbb{R}^3$ så är $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot d\mathbf{r} = \Phi(\mathbf{r}(b) - \Phi(\mathbf{r}(a)$.

(f) Det största värdet av $|f_{\mathbf{v}}(a,b)|$, då $\mathbf{v}$ är en enhetsvektor i planet, erhålls då $\mathbf{v}$ tangerar nivåkurvan till f genom punkten (a,b).

7. Definiera/förklara vad det innebär att en funktion är integrerbar över en axelparallell rektangel i planet. Var noga med att definiera/förklara de begrepp du utnyttjar så att det blir en begriplig helhet. (6p)

Formulera och bevisa medelvärdessatsen för dubbelintegraler.

Lycka till!
C-H F