MATEMATIK Datum: 2009-10-05
Chalmers tekniska högskola kl. 13.30 – 14.15

Flervariabelanalys E2, TMA043, 2009, Dugga 2

Lösningsförslag

NAMN: ....

Personnummer: ....

Uppgift	Poäng
1a	
1b	
2	
3	
SUMMA:	

1. Betrakta funktionen $f(x, y) = xy^2 - x^2y - 3x + 3y$

   (a) Visa att $(1, -1)$ är en sadelpunkt för funktionen $f(x, y)$ (1p)

   (b) Bestäm största och minsta värde för funktionen $f(x, y)$ på linjestycket mellan origo och punkten $(2, -4)$ (1p)

   Lösning:(a) Vi har $\nabla f(x, y) = (y^2 - 2xy - 3)\mathbf{i} + (2xy - x^2 + 3)\mathbf{j}$, och speciellt är $\nabla f(1, -1) = \mathbf{0}$, så $(1, -1)$ är en kritisk punkt. Vi studerar sedan Hessianen för att ev. kunna bestämma den kritiska punktens karaktär. Vi har
   $\mathscr{H}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial yx} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y & 2y - 2x \\ 2y - 2x & 2x \end{bmatrix}$ och speciellt $\mathscr{H}(1, -1) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$
   Eftersom $det(\mathscr{H}(1, -1)) = -12 < 0$ så följer det att $\mathscr{H}(1, -1)$ är indefinit, vilket visar att $(1, -1)$ är en sadelpunkt.

   (b) Funktionsvärdena på linjestycket mellan origo och punkten $(2, -4)$ beskrivs av $g(t) = f(t, -2t) = 4t^3 + 2t^3 - 3t - 6t = 6t^3 - 9t, 0 \le t \le 2$. Vi har $g'(t) = 18t^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Endast $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ligger i intervallet $0 \le t \le 2$ och funktionsvärdet i denna punkt är $g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -3\sqrt{2}$. Vi undersöker också funktionsvärdena i ändpunkterna på intervallet $0 \le t \le 2$ och finner då att $g(0) = 0$ och $g(2) = 30$.

   (b) Svar: Det största värdet är 30 och det minsta är $-3\sqrt{2}$

2. Bestäm medelvärdet av funktionen $f(x, y) = |xy|$ på området $D : 1 \le x^2 + y^2 \le 5$. (polär substitution rekommenderas) (2p)

   Lösning:
   Medelvärdet av en funktion $f(x, y)$ över ett område D är $\overline{f} = \frac{1}{\text{arean av } D} \iint_D f(x, y)dxdy$
   Av symmetriskäl är medelvärdet över D detsamma som medelvärdet över den del D_1 av D som ligger i första kvadranten. Integralen beräknas sedan enklast genom övergång till polära koordinater;

   $$\iint_{D_1} f(x, y)dxdy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^{\sqrt{5}} rcos\theta r \sin\theta \cdot rdr \right) d\theta = \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} = 3$$

   och på liknande sätt får vi

   $$\text{arean av } D_1 = \iint_D dxdy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^{\sqrt{5}} rdr \right) d\theta = \frac{\pi}{2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^{\sqrt{5}} = \pi$$

   Svar: $\frac{3}{\pi}$

3. En kropp har formen av ett klot med radie 2 och består av ett material vars densitet är proportionell mot avståndet till klotets centrum. Den totala massan av kroppen kan beräknas med trippelintegralen

   $$\iiint_\Omega k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz$$

   där $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ och k är proportionalitetskonstanten. Beräkna integralen. (sfärisk substitution rekommenderas) (2p)

   Lösning:

   $$\iiint_\Omega k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} x = r\sin\phi\cos\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = r\cos\phi \end{array} & \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, \theta)} = r^2\sin\phi \end{array} \right] =$$

   $$= \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 kr \cdot r^2 \sin\phi dr \right) d\theta \right) d\phi = k \cdot 2\pi \left[-cos\phi\right]_0^{\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 16\pi \cdot k$$

   Svar: $16\pi \cdot k$