MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat formelblad, utdelad ordlista, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2007-10-22 kl. 14.00 - 18.00

Lösning till tentamen Flervariabelanalys E2 (tma043)

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Ange en normalvektor till tangentplanet till ytan $z = 4x^2 + y^2$ i punkten $(1, 1, 5)$. (2p)

Lösning/Svar $\mathbf{n} = -8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

(b) Funktionen $f(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator, f_1 och f_2. (3p)
Ange de partiella derivatorna $\frac{\partial}{\partial u} f(x(u, v), y(u, v))$ och $\frac{\partial}{\partial v} f(x(u, v), y(u, v))$ då $x(u, v) = u^2 + v^2$ och $y(u, v) = v$.

Lösning/Svar $\dfrac{\partial f}{\partial u} = 2uf_1(x(u, v), y(u, v))$
$\dfrac{\partial f}{\partial v} = 2vf_1(x(u, v), y(u, v)) + f_2(x(u, v), y(u, v))$

(c) Ange $\nabla f(0, 0)$ då $f(x, y) = e^{2x} \cos(3y + \frac{\pi}{4})$. (2p)

Lösning/Svar $\nabla f(0, 0) = \sqrt{2}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$

(d) Beräkna $\iint_D (x + y)dA$ då $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$. (2p)

Lösning/Svar $\iint_D (x + y)dA = \int_0^1 \left(\int_0^x (x + y)dy\right) dx = \frac{1}{2}$.

(e) Beräkna kurvintegralen $\int_C (x + y)ds$ då $\mathcal{C}$ ges av (2p)
$\mathbf{r} = 2\cos(t)\mathbf{i} + 2\sin(t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \pi$.

Lösning/Svar $\int_C (x + y)ds = \int_0^\pi (2\cos t + 2\sin t)2dt = 8$

(f) Beräkna kurvintegralen $\int_C (y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{r}$ då $\mathcal{C}$ är cirkelbågen (2p)
$\mathbf{r} = 2\cos(t)\mathbf{i} + 2\sin(t)\mathbf{j}$ från $(1, 0)$ till $(-1, 0)$ via $(0, 1)$.

Lösning/Svar $\int_C (y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^\pi (2\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j}) \cdot (-2\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j})dt = 0$

(g) Vilken/vilka av punkterna $(0, 0)$, $(4, -12)$, $(-4, 12)$, $(4, 12)$ är kritiskt (stationär) punkt för funktionen $f(x, y) = 3x^3 - 12xy + 2y^2$? (3p)
Ange, för var och en av de kritiska punkterna (bland punkterna ovan), dess karaktär (lokalt max., lokalt min., sadelpunkt).

Lösning/Svar $f_1(x, y) = 9x^2 - 12y$, $f_2(x, y) = -12x + 4y$, $f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = 0$, $f_1(4, 12) = f_2(4, 12) = 0$, $f_2(-4, 12) \neq 0$, $f_2(4, -12) \neq 0$. Punkterna $(0, 0)$ och $(4, 12)$ är kritiska, de andra är det inte.

$A = f_{11}(x, y) = 18x$, $B = f12(x, y) = -12$, $C = f_{22}(x, y) = 4$.
I punkten $(0, 0)$ är $AC - B^2 < 0$, sadelpunkt.
I punkten $(4, 12)$ är $A > 0$ och $AC - B^2 > 0$, lokalt minimum.

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverade kalkyler och slutsatser!

2. Beräkna dubbelintegralen $\displaystyle\iint_D \frac{x+y}{(x^2+y^2)^2}dA$ då D är området i xy-planet som ges av $1 \le x^2+y^2 \le 4,\ |x| \le y$. (6p)

Lösning/Svar $$\iint_D \frac{x+y}{(x^2+y^2)^2}dA = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \\ dA = dxdy = rdrd\theta \\ (x,y) \in D \Leftrightarrow (r,\theta) \in E \\ E: 1 \le r \le 2, \quad \pi/4 \le \theta \le 3\pi/4 \end{array} \right\} =$$

$$\iint_E \frac{r\cos\theta + r\sin\theta}{r^4} rdrd\theta = [\sin\theta - \cos\theta]_{\pi/4}^{3\pi/4}\left[-\frac{1}{r}\right]_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3. Bestäm den potential, Φ, till $\mathbf{F} = (e^x\cos y + yz)\mathbf{i} + (xz - e^x\sin y)\mathbf{j} + (xy+z)\mathbf{k}$, som uppfyller $\Phi(0,0,0) = 0$. (6p)

Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ då $\mathcal{C}$ är spiralen $\mathbf{r} = a\cos\pi t\ \mathbf{i} + a\sin\pi t\ \mathbf{j} + bt\ \mathbf{k}$ från $(a,0,0)$ till $(a,0,4b)$.

Lösning/Svar En enkel kontroll visar att $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, således finns en potential. Eftersom $\Phi(0,0,0) = 0$ är
$\Phi(X,Y,Z) = \int_{\mathcal{C}}(e^x\cos y + yz)dx + (xz - e^x\sin y)dy + (xy+z)dz$ där $\mathcal{C}$ är någon kurva från $(0,0,0)$ till (X,Y,Z). Enklast är att välja $\mathcal{C}$ som sträckan från $(0,0,0)$ till $(X,0,0)$ följd av sträckan från $(X,0,0)$ till $(X,Y,0)$ följd av sträckan från $(X,Y,0)$ till (X,Y,Z).

Då är $\Phi(X,Y,Z) = \int_0^X(e^x\cos 0 + 0)dx + \int_0^Y(0 - e^X\sin y)dy + \int_0^Z(XY+z)dz = e^X - 1 + e^X(\cos Y - 1) + XYZ + \frac{Z^2}{2} = e^X\cos Y + XYZ + \frac{Z^2}{2} - 1$

Alltså är den sökta potentialen $\Phi(x,y,z) = e^x\cos y + xyz + \frac{z^2}{2} - 1$

$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \Phi(a,0,4b) - \Phi(a,0,0) = 8b^2$

4. Beräkna flödet av $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$ genom ytan $z = \sqrt{4-4x^2-y^2},\ 4x^2+y^2 \le 4$ med normalriktning uppåt ($\mathbf{k}$-koordinaten positiv). (6p)

Lösning/Svar Ytan parametriseras enklast med $\left\{ \begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{4-4x^2-y^2} \\ D: 4x^2+y^2 \le 4 \end{array} \right.$.

Då är $\hat{\mathbf{N}}dS = (\frac{4x}{\sqrt{4-4x^2-y^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{4-4x^2-y^2}}\mathbf{j} + \mathbf{k})dxdy$ där $\hat{\mathbf{N}}$ är uppåtriktad, som begärdes.

Det sökta flödet är nu

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}dS = \iint_D (yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}-z^2\mathbf{k})\cdot(\frac{4x}{\sqrt{4-4x^2-y^2}}\mathbf{i}+\frac{y}{\sqrt{4-4x^2-y^2}}\mathbf{j}+\mathbf{k})dxdy =$$
$$\iint_D (\frac{4xyz}{\sqrt{4-4x^2-y^2}} + \frac{xyz}{\sqrt{4-4x^2-y^2}} - z^2)dxdy = \iint_D (5xy - (4-4x^2-y^2))dxdy$$

D är området som ges av $4x^2+y^2 \le 4$. Av symmetriskäl är $\iint_D xydxdy = 0$. Med substitutionen $x = \frac{1}{2}r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$ är $dxdy = \frac{1}{2}rdrd\theta$ och D motsvaras av $E:\ 0 < r < 2,\quad 0 \le \theta < 2\pi$.

Alltså $$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}dS = \iint_E (r^2-4)\frac{1}{2}rdrd\theta = 2\pi\frac{1}{2}\left[\frac{r^4}{4} - 2r^2\right]_0^2 = -4\pi.$$

5. Ekvationen $\sqrt{x^2+y^2+z^2} + xyz = 7$ bestämmer en funktion $z(x,y)$ sådan att $z(1,2) = 2$. Bestäm en ekvation för normalen till nivåkurvan $z(x,y) = 2$ i punkten $(1,2)$. (4p)

Lösning/Svar Gradienten till $z(x,y)$ i punkten $(1,2)$ är normal till den nivåkurva till $z(x,y)$ som går genom punkten $(1,2)$. Vi skall därför beräkna $\nabla z(1,2)$.

Funktionen $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + xyz - 7$ har partiella derivator

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + yz \\ f_2(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + xz \\ f_3(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + xy \end{cases}$$

Med $z = z(x,y)$ ger derivering av funktionen $g(x,y) = f(x,y,z(x,y))$ med avseende på x respektive y:

$$\begin{cases} g_1(x,y) = f_1(x,y,z) + f_3(x,y,z)z_1(x,y) \\ g_2(x,y) = f_2(x,y,z) + f_3(x,y,z)z_2(x,y) \end{cases}$$

Eftersom $g(x,y) = 0$ för alla (x,y) i en omgivning av $(1,2)$ har vi att

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) + f_3(x,y,z)z_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y,z) + f_3(x,y,z)z_2(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{för alla } (x,y) \text{ i en omgivning av } (1,2).$$

Speciellt ger detta att

$$\begin{cases} f_1(1,2,2) + f_3(1,2,2)z_1(1,2) = 0 \\ f_2(1,2,2) + f_3(1,2,2)z_2(1,2) = 0 \end{cases}$$

Vi får $\nabla z(1,2) = -\frac{f_1(1,2,2)}{f_3(1,2,2)}\mathbf{i} - \frac{f_2(1,2,2)}{f_3(1,2,2)}\mathbf{j} = -\frac{13}{8}\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

Normalens ekvation är då $\dfrac{x-1}{-\frac{13}{8}} = \dfrac{y-2}{-1}$ eller $8(x-1) = 13(y-2)$.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Antag att funktionerna f och g har kontinuerliga partiella derivator. Då gäller att om C är cirkelbågen $x^2+y^2 = 1$ från $(1,0)$ till $(-1,0)$ via $(0,1)$ och D är halvcirkelskivan $x^2+y^2 \le 1$, $y \ge 0$ så är
$\int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy.$

Lösning/Svar Falskt

(b) Låt $f(x,y) = 2x^2 - 6xy + 3y^2$.
Då finns det en enhetsvektor $\mathbf{v}$ så att $f_{\mathbf{v}}(1,2) = 14$.

Lösning/Svar Falskt

(c) Om funktionen f har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning till punkten (a,b) så gäller att

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - hf_1(a,b) - kf_2(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Lösning/Svar Sant

(d) Antag att $f(x, y)$ har lokalt minimum i en punkt (a, b).
Då är alltid $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$.

Lösning/Svar Falskt

(e) Om kurvan $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ är deriverbar och funktionen f har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning till punkten $P = \mathbf{r}(t_0)$ samt $f(\mathbf{r}(t)) = 1$ för alla t så gäller att $\mathbf{r}'(t_0) \cdot \nabla f(P) = 0$.

Lösning/Svar Sant

(f) Om vektorfältet $\mathbf{F}$ är kontinuerligt i ett område D så finns det en potentialfunktion Φ till $\mathbf{F}$ på D.

Lösning/Svar Falskt

7. Definiera begreppet gränsvärde för en rellvärd funktion av två variabler. (6p)

Förklara så bra du kan med egna ord vad som menas med $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = A$.

Bevisa någon gränsvärdesregel, vilken du vill men beviset skall utnyttja definitionen av gränsvärde.

Förklara, t.ex med exempel, varför man inte kan vara säker på att

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$ även om man vet att $\lim\limits_{y\to 0} f(0, y) = 0$ och $\lim\limits_{x\to 0} f(x, kx) = 0$ för alla k.

C-H F