MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 100827 kl. 8.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: Fredrik Lindgren
Telefon: 0703 088 304

LÖSNINGSFÖRSLAG

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 09/10 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.** (14p)

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Antag att man vill tillverka en låda i form av ett rätblock till så låg kostnad som möjligt. Lådan skall rymma 1 liter och inte ha något lock (dvs vara öppen upptill). Materialet i lådans fyra sidväggar är fyra gånger så dyrt som materialet i botten. Hur hög skall lådan vara? (6p)

Lösning: Låt b, d, h vara lådans bredd, djup respektive höjd i dm. Vi vill då minimera kostnaden för lådan som är proportionell mot $4 \cdot 2bh + 4 \cdot 2dh + bd = 8bh + 8dh + bd$ (målfunktionen) under förutsättning att $bdh = 1$ (bivillkoret). Ur bivillkoret följer att $h = \frac{1}{bd}$, som insatt i målfunktionen ger oss kostnadsfunktionen

$$k(b,d) = \frac{8}{d} + \frac{8}{b} + bd$$

Vi är nu bara intresserade av positiva värden på b och d. Vidare observerar vi att då b eller d går mot 0 eller ∞ så går $k(b,d)$ mot ∞, vilket betyder att ett minimum måste inträffa i en kritisk punkt;

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial b} = \frac{-8}{b^2} + d = 0 \\ \frac{\partial k}{\partial b} = \frac{-8}{b^2} + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^4 = 8b \\ d^4 = 8d \end{cases} \overset{b,d>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b^3 = 8 \\ d^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ d = 2 \end{cases}$$

Eftersom $(2,2)$ är den enda kritiska punkten till $k(b,d)$ och funktionen saknar singulariteter så måste funktionens minsta värde antas i $(2,2)$. För dessa värden på b och d är $h = \frac{1}{bd} = \frac{1}{4} = 0.25$

Svar: Lådan skall vara 25 mm hög

3. Antag att vi inför cylindriska koordinater r, θ, z vars samband till de Cartesiska koordinaterna x, y, z ges av

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

(a) Uttryck området $\Omega : x^2 + y^2 \leq z, x \geq 0, z \leq 2$ i de cylindriska koordinaterna r, θ, z (2p)

Svar: $r^2 \leq z \ , \ -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \ , \ z \leq 2$

(b) Beräkna volymen av kroppen Ω (4p)

Lösning: Volymen kan t.ex. beräknas på följande sätt;

$$\iiint_\Omega dV = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{z}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r d\theta dr dz = \pi \int_0^2 \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{z}} dz = \frac{\pi}{2} \int_0^2 z dz = \frac{\pi}{2} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^2 = \pi$$

eller alternativt kan vi integrera i en annan ordning enligt följande;

$$\iiint_\Omega dV = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r d\theta dz dr = \pi \int_0^{\sqrt{2}} r(2 - r^2)\, dr = \pi \left[r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = \pi$$

Om vi vill kan vi också betrakta kroppen som det område, som över området $D : x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0$ i xy-planet, begränsas uppåt av funktionsytan $f(x, y) = 2$ och nedåt av funktionsytan $g(x, y) = x^2 + y^2$, och beräkna volymen genom följande dubbelintegral;

$$\iint_D (2 - (x^2 + y^2)) dx dy \overset{\text{polär subst.}}{\overset{\downarrow}{=}} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 - r^2) r d\theta dr \overset{\text{se ovan}}{\overset{\downarrow}{=}} \pi$$

Svar: π (volymenheter)

4. Betrakta den plana ytbit $\mathcal{S}$ som parametriseras av

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + (u + v)\mathbf{j} + (u - v)\mathbf{k} \quad , \quad 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq u$$

(a) Beräkna arean av $\mathcal{S}$ (3p)

Lösning:

$$\mathbf{r}_1(u, v) \times \mathbf{r}_2(u, v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$Arean = \iint_\mathcal{S} dS = \int_0^2 \int_0^u |\mathbf{r}_1(u, v) \times \mathbf{r}_2(u, v)| dv du =$$

$$= \int_0^2 \int_0^u \sqrt{6} dv du = \sqrt{6} \int_0^2 u du \sqrt{6} \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^2 = 2\sqrt{6}$$

Svar: $2\sqrt{6}$ (areaenheter)

(b) Beräkna flödet av $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ upp genom ytan $\mathcal{S}$ (dvs. i positiv z-led) (3p)

Lösning:

$$\text{Flödet} = \iint_\mathcal{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^2 \int_0^u \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_1(u, v) \times \mathbf{r}_2(u, v)) dv du =$$

$$= \int_0^2 \int_0^u (-2u + 2(u + v) + (u - v)) dv du = \int_0^2 \int_0^u (u + v)\, dv du =$$

$$= \int_0^2 \left[uv + \frac{v^2}{2}\right]_0^u du = \int_0^2 \frac{3u^2}{2} du = \left[\frac{u^3}{2}\right]_0^2 = 4$$

Svar: 4 (volymenheter per tidsenhet)

Överbetygsdelen finns på baksidan av detta blad

Del 2: Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Antag att x används som parameter i en parametrisering $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x)$ av skärningskurvan mellan nivåytorna $x + y - z + \sin(xyz) = 0$ och $x - y + 2z - \cos(xyz) = 0$, i en liten omgivning av $(0, 1, 1)$. Beräkna hastighetsvektorn $\mathbf{r}'(0)$. (6p)

Lösning: Uppdaterad version av detta dokument med lösning även till denna uppgift kommer att läggas ut i vecka 35.

6. Använd Stokes sats för att beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} y dx - x dy + z^2 dz$, där $\mathcal{C}$ är skärningskurvan mellan cylindrarna $z = y^2$ och $x^2 + y^2 = 4$, orienterad moturs sett från punkten $(0, 0, 5)$. (6p)

Lösning: Uppdaterad version av detta dokument med lösning även till denna uppgift kommer att läggas ut i vecka 35.

7. (a) Vad menas med att en funktion $f(x, y)$ är *kontinuerlig* i en punkt (a, b) ? (1p)

(b) Definiera begreppet *partiell derivata* för en funktion $f(x, y)$. (1p)

(c) Vad menas med att en funktion $f(x, y)$ är *differentierbar* i en punkt (a, b) ? (2p)

(d) Redogör för relationerna mellan följande egenskaper för en funktion $f(x, y)$: (2p)

i. $f(x, y)$ är kontinuerlig i (a, b)

ii. $f(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator i (a, b)

iii. $f(x, y)$ är differentierbar i (a, b)

Lycka till!
Carl-Henrik F

Anonym kod	**LÖSNINGSFÖRSLAG 100827**	sid.nummer **1**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna $f(1,0)$ då $f(x,y) = g(h(y), h(x)), g(s,t) = s^2t + s/t$ och $h(u) = 1/(u+1)$. (3p)

Lösning: $f(1,0) = g(h(0), h(1)) = g(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

Svar: $f(1,0) = \frac{5}{2}$

(b) Ortsvektorn för en partikels position i rummet vid en viss tidpunkt $t > 0$ ges av $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$. Bestäm den tidpunkt vid vilket partikeln har lägst fart. (3p)

Lösning: Partikeln har hastigheten $\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{j} + \mathbf{k}$ och farten $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{4t^2 + \frac{1}{4t} + 1}$. Farten är som störst precis då $f(t) = 4t^2 + \frac{1}{4t} + 1$ är som störst. Vi undersöker därför om $f(t)$ har några stationära punkter; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 8t - \frac{1}{4t^2} = 0 \Leftrightarrow t^3 = 2^{-5} \Leftrightarrow t = 2^{-5/3}$. Eftersom $f(t) \to \infty$ då $t \to 0^+$ och då $t \to \infty$ så måste $f(t)$ ha sitt minsta värde då $t = 2^{-5/3}$

Svar: $t = 2^{-5/3}$

(c) Beräkna divergensen och rotationen för vektorfältet $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + z\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$. Är vektorfältet källfritt och/eller virvelfritt i $\mathbb{R}^3$? (2p)

Lösning:
$$div\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(yz^2) = y + 2yz \not\equiv 0$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & z & yz^2 \end{vmatrix} = (z^2 - 1)\mathbf{i} - x\mathbf{k} \not\equiv \mathbf{0}$$

Svar: $div\mathbf{F} = y + 2yz$ och $\operatorname{curl}\mathbf{F} = (z^2 - 1)\mathbf{i} - x\mathbf{k}$.
$\mathbf{F}$ är varken källfritt eller virvelfritt i $\mathbb{R}^3$.

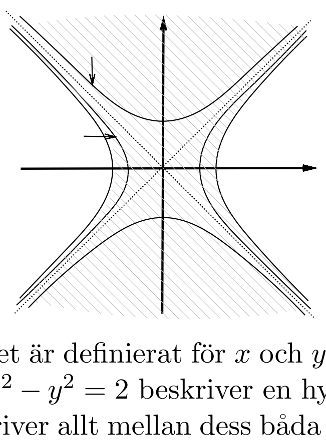
(d) Beräkna det arbete som det konservativa kraftfältet $\mathbf{F} = (x+2)\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ utför på en partikel som rör sig utefter cirkelbågen $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ i xy-planet, från punkten $(1,0)$ till $(-1,0)$ (3p)

Lösning: Eftersom kraftfältet är konservativt så är arbetet oberoende av vilken väg partikeln tar mellan de givna punkterna. Låt oss därför istället beräkna arbetet längs med den raka sträcka $\mathcal{C}$ från $(1,0)$ till $(-1,0)$. Det är naturligt att använda x som parameter i parametrisering av $\mathcal{C}$ dvs.$\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i}$. Vi får då att;
$$Arbetet = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(x)) \cdot \mathbf{r}'(x)dx = \int_1^{-1} x + 2\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^{-1} = -4$$

Svar: -4 (Joule)

(e) Skissa definitionsområdet till $f(x,y) = \sqrt{2 - (x^2 - y^2)}$ i samma figur som nivåkurvorna $f(x,y) = 1$ och $f(x,y) = 2$. (3p)

Skiss:



Förklaring av skiss: Uttrycket är definierat för x och y sådana att $2 - (x^2 - y^2) \geq 0$ dvs. $x^2 - y^2 \leq 2$. Ekvationen $x^2 - y^2 = 2$ beskriver en hyperbel som skär x-axeln vid $x = \pm\sqrt{2}$ och $x^2 - y^2 \leq 2$ beskriver allt mellan dess båda "hyperbelgrenar"(se streckat område i figuren). Nivåkurvan $f(x,y) = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1$ är en hyperbel som skär x-axeln vid $x = \pm 1$ och nivåkurvan $f(x,y) = 2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = -2$ är en hyperbel som skär y-axeln vid $y = \pm\sqrt{2}$. Asymptoterna $x = \pm y$ kan vara till hjälp vid skissandet.

Formelblad för TMA043 och MVE085 09/10

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad , \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad , \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a - x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C \quad , \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + a} + a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\, dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\, dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.