

# TMA043 Flervariabelanalys E2, ht 09

## Vecko-PM läsvecka 4

**Adams: 14.1 - 14.6**

**Innehåll:**

Dubbel- och trippelintegraler, beräkning med upprepad integrering, generaliserade dubbelintegraler, medelvärdessats för dubbelintegraler, variabelsubstitution i dubbel- och trippelintegraler.

**Lärmål:**

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

Adams	Mål
14.1	känna till och utnyttja dubbelintegralens egenskaper (sid 758) vid problemlösning
14.2	beräkna dubbelintegral genom upprepad enkelintegration (sats 14.2.2).
14.3	avgöra huruvida en integral är generaliserad och i så fall förklara vad som gör den generaliserad.
14.3	beräkna generaliserad dubbelintegral för $f(x, y) \geq 0$ och därigenom avgöra konvergens/divergens.
14.3	veta vad som menas med medelvärdet av en funktion av två eller tre variabler på ett område.
14.4	ange sambandet mellan cartesiska och polära koordinater samt sambandet mellan areaelementen.
14.4	ange hur ett område givet i cartesiska koordinater transformeras vid övergång till andra koordinater och omvänt.
14.4	känna till vad som menas med att en transformation $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ är ett-ett (sid 777).
14.4	beräkna dubbelintegraler med hjälp av föreslagen variabelsubstitution och tillämpning av sats 14.4.4.
14.5	beräkna trippelintegraler genom upprepad enkelintegration.
14.6	ange sambanden mellan cartesiska och sfäriska/cylindriska koordinater samt sambandet mellan volymelementen.
14.6	beräkna trippelintegraler med hjälp av föreslagen variabelsubstitution.

För överbetyg skall du också kunna:

Adams	Mål
14.1	utnyttja symmetrier vid beräkning av dubbelintegraler (se t.ex. 3 s 758-759).
14.3	formulera och bevisa medelvärdessatsen (sats 14.3.3) för dubbelintegraler.
14.4	formulera satsen om variabelsubstitution i dubbelintegraler (sid 778).
14.4	välja lämplig variabelsubstitution för beräkning av dubbelintegral
14.6	välja lämplig variabelsubstitution för beräkning av trippelintegral
14	beräkna itererad enkelintegral, två/tre variabler, genom att kasta om integrationsordningen (se t.ex. övn. 14.2.15).

## Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
14.1	13	15, 17	
14.2	3, 5, 19	9, 13	25, 27, 30
14.3	3	7, 9	17, 21
14.4	3, 9, 13	15, 21, 23, 32( $u = x + y, v = 3x + 4y$ ), 35b	25, 27, 33, 36
14.5	1, 5	9, 14	7, 11, 19, 27
14.6	1–14, 15, 17	27, 29, 30	19, 14.4.29

**Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Nyttig träning för alla, problemtypen ges endast på tentans överbetygsdel.**

SF 1 Om  $D$  är kvadraten i  $xy$ -planet med hörn i punkterna  $(\pm 1, 0)$  och  $(0, \pm 1)$  så är avsymmetriskäl alltid  $\iint_D f(x, y) dx dy = 4 \iint_T f(x, y) dx dy$  där  $T$  är triangeln med hörn i punkterna  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  och  $(0, 1)$

SF 2 För alla integrerbara funktioner  $f(x, y)$  gäller att  $\int_0^1 \int_y^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx$

SF 3 Transformationen  $x = u^3 - u, y = v$  avbildar området  $S : -2 \leq u \leq 2, -2 \leq v \leq 2$  i  $uv$ -planet på området  $D : -6 \leq x \leq 6, -2 \leq y \leq 2$  i  $xy$ -planet och

$$\iint_D y^2 dx dy = \iint_S v^2 \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

SF 4 Integralen  $\iint_D (x^2 + y^2)^{\alpha/2} dx dy$ , där  $D : 0 \leq x \leq \infty, 0 \leq y \leq \infty$ , konvergerar om och endast om  $\alpha > -2$

SF 5 Om  $f(x, y)$  är en positiv och kontinuerlig funktion på ett begränsat område  $D$  i  $xy$ -planet så är alltid  $0 < \iint_D f(x, y) dx dy < \infty$

SF 6 Om  $f(x, y)$  är integrerbar på ett begränsat område  $D$  i  $xy$ -planet så är alltid

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\text{int}(D)} f(x, y) dx dy$$

SF 7 För alla integrerbara funktioner  $f(x, y)$  gäller att  $\iint_D (f(x, y))^2 dx dy = (\iint_D f(x, y) dy dx)^2$

SF 8 Om  $f(x, y)$  är integrerbar på området  $D : 0 \leq x, y \leq 1$  så ger alltid integralen  $\iint_D f(x, y) dx dy$  volymen av det område i rummet som begränsas av  $xy$ -planet, funktionsytan  $z = f(x, y)$  samt planen  $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ .

SF 9 Integralen  $\iiint_D r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta$ , där  $D : 0 \leq r \leq 1, -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$  ger volymen av enhetsklotet i rummet.