MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat formelblad, utdelad ordlista, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2007-10-22 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen Telefonvakt:Peter Lindroth
tel. 0762-721860

Flervariabelanalys E2 (tma043)

Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv **tentamenskoden** på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 07/08 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida 23/10. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Ange en normalvektor till tangentplanet till ytan $z = 4x^2 + y^2$ i punkten $(1, 1, 5)$. (2p)

(b) Funktionen $f(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator, f_1 och f_2. (3p)
Ange de partiella derivatorna $\frac{\partial}{\partial u} f(x(u,v), y(u,v))$ och $\frac{\partial}{\partial v} f(x(u,v), y(u,v))$ då $x(u, v) = u^2 + v^2$ och $y(u, v) = v$.

(c) Ange $\nabla f(0, 0)$ då $f(x, y) = e^{2x} \cos(3y + \frac{\pi}{4})$. (2p)

(d) Beräkna $\iint_D (x + y) dA$ då $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$. (2p)

(e) Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} (x + y) ds$ då $\mathcal{C}$ ges av (2p)
$\mathbf{r} = 2\cos(t)\mathbf{i} + 2\sin(t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \pi$.

(f) Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} (y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{r}$ då $\mathcal{C}$ är cirkelbågen (2p)
$\mathbf{r} = 2\cos(t)\mathbf{i} + 2\sin(t)\mathbf{j}$ från $(1, 0)$ till $(-1, 0)$ via $(0, 1)$.

(g) Vilken/vilka av punkterna $(0, 0)$, $(4, -12)$, $(-4, 12)$, $(4, 12)$ är kritiskt (stationär) punkt för funktionen $f(x, y) = 3x^3 - 12xy + 2y^2$? (3p)
Ange, för var och en av de kritiska punkterna (bland punkterna ovan), dess karaktär (lokalt max., lokalt min., sadelpunkt).

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverade kalkyler och slutsatser!

2. Beräkna dubbelintegralen $\displaystyle\iint_D \frac{x + y}{(x^2 + y^2)^2} dA$ då D är området i xy-planet som ges av $1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ |x| \le y$. (6p)

3. Bestäm den potential, Φ, till $\mathbf{F} = (e^x \cos y + yz)\mathbf{i} + (xz - e^x \sin y)\mathbf{j} + (xy + z)\mathbf{k}$, som uppfyller $\Phi(0, 0, 0) = 0$. (6p)

Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ då $\mathcal{C}$ är spiralen $\mathbf{r} = a\cos \pi t\ \mathbf{i} + a \sin \pi t\ \mathbf{j} + bt\ \mathbf{k}$ från $(a, 0, 0)$ till $(a, 0, 4b)$.

4. Beräkna flödet av $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$ genom ytan $z = \sqrt{4 - 4x^2 - y^2}$, $4x^2 + y^2 \le 4$ med normalriktning uppåt ($\mathbf{k}$-koordinaten positiv). (6p)

Var god vänd!

5. Ekvationen $\sqrt{x^2+y^2+z^2} + xyz = 7$ bestämmer en funktion $z(x,y)$ sådan att $z(1,2) = 2$. Bestäm en ekvation för normalen till nivåkurvan $z(x,y) = 2$ i punkten $(1,2)$. (4p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Antag att funktionerna f och g har kontinuerliga partiella derivator. Då gäller att om $\mathcal{C}$ är cirkelbågen $x^2+y^2=1$ från $(1,0)$ till $(-1,0)$ via $(0,1)$ och D är halvcirkelskivan $x^2+y^2 \leq 1, \quad y \geq 0$ så är $\int_{\mathcal{C}} f(x,y)dx + g(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy.$

(b) Låt $f(x,y) = 2x^2 - 6xy + 3y^2$.
Då finns det en enhetsvektor $\mathbf{v}$ så att $f_{\mathbf{v}}(1,2) = 14$.

(c) Om funktionen f har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning till punkten (a,b) så gäller att

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - hf_1(a,b) - kf_2(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

(d) Antag att $f(x,y)$ har lokalt minimum i en punkt (a,b).
Då är alltid $\nabla f(a,b) = \mathbf{0}$.

(e) Om kurvan $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ är deriverbar och funktionen f har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning till punkten $P = \mathbf{r}(t_0)$ samt $f(\mathbf{r}(t)) = 1$ för alla t så gäller att $\mathbf{r}'(t_0)\cdot\nabla f(P) = 0$.

(f) Om vektorfältet $\mathbf{F}$ är kontinuerligt i ett område D så finns det en potentialfunktion Φ till $\mathbf{F}$ på D.

7. Definiera begreppet gränsvärde för en rellvärd funktion av två variabler. (6p)

Förklara så bra du kan med egna ord vad som menas med $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$.

Bevisa någon gränsvärdesregel, vilken du vill men beviset skall utnyttja definitionen av gränsvärde.

Förklara, t.ex med exempel, varför man inte kan vara säker på att

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ även om man vet att $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$ och $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx) = 0$ för alla k.

Lycka till!
C-H F