MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat formelblad, utdelad ordlista, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2008-08-29 kl. 14.00 - 18.00

Tentamen Telefonvakt: Jonatan Vasilis

tel. 0762-721860

Flervariabelanalys E2 (tma043)

Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv **tentamenskoden** på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 07/08 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida 1/9. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Ange en ekvation till tangentplanet till ytan $z = x^2 + y^2$ i punkten $(1, 1, 2)$. (2p)

(b) Funktionen $f(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator f_1 och f_2. (3p)
Ange de partiella derivatorna $\frac{\partial}{\partial u} f(x(u, v), y(u, v))$ och $\frac{\partial}{\partial v} f(x(u, v), y(u, v))$ då $x(u, v) = u^2 + v^2$ och $y(u, v) = u^2 - v^2$.

(c) Ange en integral för beräkning av längden av kurvan (2p)
$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ mellan punkterna $(a, 0, 0)$ och $(a, 0, 2\pi b)$.
Beräkna längden.

(d) Ange riktningsderivatan i punkten $(1, -1)$ av funktionen $f(x, y) = x^2 - 2xy$ i riktningen $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. (2p)

(e) Beräkna $\iint_D (x + 2y)dA$ då $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 2x\}$. (2p)

(f) Vilken/vilka av punkterna $(0, 3)$, $(2, 4)$, $(1, 2)$, $(-3, -6)$ är kritisk (stationär) punkt för funktionen $f(x, y) = 8x^3 - 6x^2y - 3y^2 + 18y$? (3p)
Ange, för var och en av de kritiska punkterna (bland punkterna ovan), dess karaktär (lokalt max., lokalt min., sadelpunkt).

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverade kalkyler och slutsatser!

2. Bestäm alla par av tal a och b för vilka vektorfältet $(axy + y^3, x^2 + bxy^2)$ är ett potentialfält. Bestäm också i förekommande fall en potentialfunktion. (6p)

3. Beräkna kurvintegralen $\oint_\gamma (3x^4 + 2x^2y)dx - 2xy^2dy$ där γ är kurvan $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. (6p)

4. Beräkna ytintegralen (6p)

$$\iint_Y (x^3, y^3, z^3) \cdot \mathbf{N}\, dS$$

där Y är sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ med utåtriktad normal $\mathbf{N}$.

Var god vänd!

5. Bestäm största och minsta värdet för funktionen $f(x,y) = 8x^2 + 4xy$ då punkten (x,y) ligger på ellipsen $4x^2 + y^2 = 16$. (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Eftersom $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) = 0$ så är $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy = 0$ för alla slutna kurvor $\mathcal{C}$.

(b) Om $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ så är $\displaystyle\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$ och $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,kx) = 0$ för alla k.

(c) Antag att $f(x,y)$ har lokalt maximum i en punkt (a,b).
Då är alltid (a,b) lösning till ekvationssystemet $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$.

(d) Gradienten till $f(x,y)$ i punkten (a,b) är normal till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(a,b,f(a,b))$.

(e) Om D är kvadraten i xy-planet med hörn i punkterna $(\pm1,0)$ och $(0,\pm1)$ så är av symmetriskäl alltid $\iint_D f(x,y)\,dxdy = 4\iint_T f(x,y)\,dxdy$ där T är triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$

(f) Det största värdet av $|f_{\mathbf{v}}(a,b)|$, då $\mathbf{v}$ är en enhetsvektor i planet, är det största av talen $|f_1'(a,b)|$ och $|f_2'(a,b)|$.

7. Ange formeln för beräkning av area av krökt yta given av en parametrisering. Motivera formeln. Härled formeln för area av en yta som uppkommer då en plan kurva $(x,y) = (x(t), y(t))$ roterar kring y-axeln. (6p)

Lycka till!
C-H F