OBS! Denna tenta innehåller samma uppgifter som tentan den 15 jan 2010, men är omskrivet till det nya format (med tre delar) som gäller under läsåret 2010/11

Tentamen
MVE085 Flervariabelanalys V2

2010-01-15 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Oscar Marmon , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \frac{ye^{xy}}{x} dA$ då D är området i xy-planets första kvadrant begränsat av kurvorna $xy = 1,\ xy = 3,\ y = x$ och $y = 4x$. (6p)

7. Beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} \frac{-y\,dx}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy}{x^2+y^2}$ då $\mathcal{C}$ är den positivt orienterade randen till området $1 \leq x^2 + y^2,\ x^2 + 4y^2 \leq 9$. Visa sedan att kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}} \frac{-y\,dx}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = 2\pi$ för alla kurvor $\mathcal{C}$ som går ett varv moturs runt origo. (6p)

8. Definiera begreppet gränsvärde för en funktion av två variabler. Bevisa sedan, genom direkt tillämpning av definitionen, att funktionen $f(x, y) = 3x + 2y$ har gränsvärdet 7 då (x, y) går mot $(1, 2)$. (6p)

Ge exempel på funktion av två variabler, som saknar gränsvärde då $(x, y) \to (0, 0)$ men där alla gränsvärden $f(x, kx)$, då $x \to 0$, samt $f(0, y)$, då $y \to 0$, existerar och är lika. Visa att din funktion uppfyller villkoren.

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för TMA043 och MVE085, 10/11

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2010-01-15	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten $(1, -1, 1)$ till funktionsytan $z = \frac{2x}{x^2+y^2}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Visa att $(-1, -1)$ är kritisk punkt till $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ och bestäm punktens karaktär. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Antag att f har kontinuerliga partiella derivator av alla ordningar. Bestäm $\frac{\partial}{\partial r} f(r \cos t, r \sin t)$ och $\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} f(r \cos t, r \sin t)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Temperaturen $T(x, y)$ (mätt i $^\circ C$) i punkter i xy-planet ges av $T(x, y) = 4x^2 + y^2$. (6p)

(a) Skissa den nivåkurva $T(x, y) = k$, som går genom punkten $(2, 3)$.

(b) I vilken riktning från $(2, 3)$ ökar temperaturen snabbast?

(c) Hur stor är temperaturökningshastigheten (i grader per längdenhet) i punkten $(2, 3)$ i riktningen du angav ovan?

(d) Bestäm temperaturökningshastigheten (i grader per tidsenhet) vid en förflyttning med farten 3 (längdenhet per tidsenhet) från punkten $(2, 3)$ i riktningen som ges av $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

(e) Ange en parametriserad kurva (en rät linje duger) som går genom punkten $(2, 3)$ och där har farten 3 och hastighetsvektorn parallell med $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2010-01-15	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna dubbelintegralen $\iint_D xe^y\,dA$ då D är området $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna kurvintegralen $\oint_{\mathcal{C}}(\sin x + 3y)\,dx + (e^{-y} - 2x)\,dy$ då $\mathcal{C}$ är randen till området D : $x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0$ ett varv moturs. (3p)

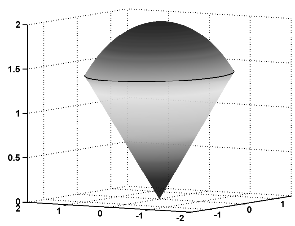
Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Beräkna massan (6p)

$$m = \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\,dV$$



och masscentrums z-koordinat

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_D z(x^2 + y^2 + z^2)\,dV$$

då D är kroppen som ges av $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ och densiteten $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. (Sfärisk substitution rekommenderas.)

5. $\mathcal{S}$ är halvsfären $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 4$, med uppåtriktad normalvektor. Beräkna ytintegralen $\iint_{\mathcal{S}} z^2\,dS$. (6p)