TMA043 Flervariabelanalys E2 H09

Carl-Henrik Fant

Matematiska vetenskaper
Chalmers
Göteborgs universitet
tel. (arb) 772 35 57
epost: carl-henrik.fant@chalmers.se

1 september 2009

Outline

Omfattning och innehåll

10.1 Punkter och vektorer i $\mathbb{R}^n$, mängder i $\mathbb{R}^n$
12.1 Reellvärda funktioner av flera variabler, graf, nivåkurvor
10.5 Andragradskurvor och -ytor.
10.2 – 10.4 Repetition efter behov

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
10.1	förklara vad som menas med *omgivning* till en punkt i $\mathbb{R}^n$
10.1	förklara vad som menas med inre punkt, yttre punkt och randpunkt till en mängd i $\mathbb{R}^n$
10.1	förklara vad som menas med öppen mängd, sluten mängd samt det inre, det yttre och komplementet av en mängd i $\mathbb{R}^n$
10.1, 10.5 12.1	skissa plan, cylindriska ytor och andragradsytor, utgående från ytans ekvation samt ange vilken typ av yta ekvationen representerar (se även 8.1).
12.1	redogöra för funktionsbegreppen (def. 12.1), begreppen nivåkurva och nivåyta samt skissa enkla funktionsytor.

Centrala begrepp, en liten ordlista:

distance avstånd

complement the complement of a set – komplementet av/till en mängd

neighbourhood omgivning

open open set – öppen mängd, open interval – öppet intervall, open disc – öppen cirkelskiva, open ball – öppen boll

closed Sluten mängd (inte "stängd")

boundary boundary point – Randpunkt, the boundary – randen

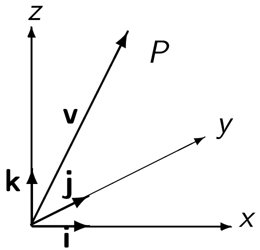
interior interior point – inre punkt, the interior – det inre av en mängd

exterior exterior point – yttre punkt, the exterior – det yttre av en mängd

$\mathbb{R}^n$

Repetition av Lay med anpassning till Adams.

En *vektor* $\mathbf{v}$ eller *punkt* P i $\mathbb{R}^3$ är en trippel av reella tal: betecknas $(x_1, \; x_2, \; x_3)$ eller $(x, \; y, \; z)$.



Här är $\mathbf{v} = \vec{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
Om $P = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ och $Q = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ så är
$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$

En *vektor* eller *punkt* i $\mathbb{R}^n$ är en n-tipel av reella tal:
$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n)$

Normen, längden av en vektor $\mathbf{v}$ är skalären $\|\mathbf{v}\|$ som ges av:
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ \cdots\ + v_n^2}$
Notera att $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$.
Detta är mycket användbart t.ex. då man vill bevisa att två längder är lika eftersom man då kan utnyttja räkneregler för skalärprodukt och slipper rottecknet.

Låt **u** och **v** vara vektorer i $\mathbb{R}^n$.

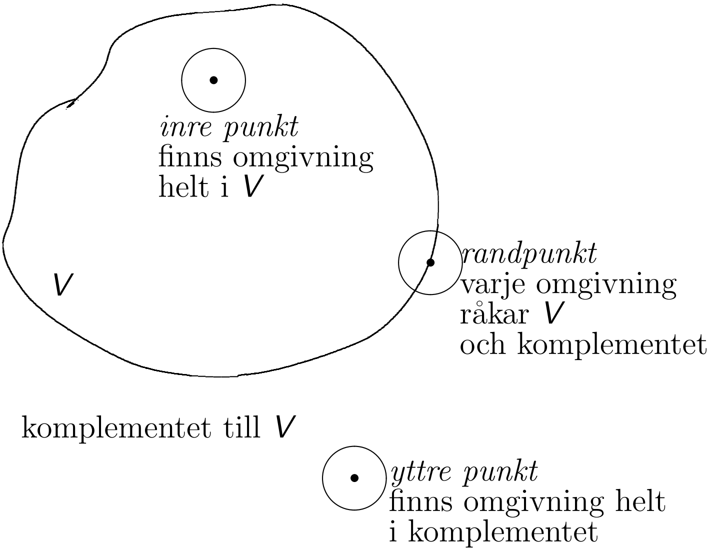
Avståndet mellan **u** och **v** betecknas $\mathrm{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ och ges av

$$\mathrm{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

Om P och Q är punkter i $\mathbb{R}^3$ så är avståndet mellan dem
$\mathrm{dist}(P, Q) = \left\|\vec{PQ}\right\| = \sqrt{[x_2 - x_1]^2 + [y_2 - y_1]^2 + [z_2 - z_1]^2}$

En *omgivning* $\mathcal{B}_r(P)$ till en punkt P består av alla punkter Q som uppfyller $\mathrm{dist}(P, Q) < r$.

Alltså cirkelskiva i $\mathbb{R}^2$ eller boll i $\mathbb{R}^3$. Periferin är inte medräknad!


inre punkt
finns omgivning helt i V
randpunkt
varje omgivning råkar V och komplementet
V
komplementet till V
yttre punkt
finns omgivning helt i komplementet

Det *inre* av en mängd består av alla inre punkter i mängden.

Randen av en mängd består av alla randpunkter till mängden.

Det *yttre* av en mängd består av alla yttre punkter till mängden.

En mängd kallas *öppen* om ingen randpunkt tillhör mängden.

En mängd kallas *sluten* om alla randpunkter tillhör mängden.

Centrala begrepp, en liten ordlista:

function	funktion, transformation, mapping – avbildning.
domain	definitionsmängd, domän
codomain	målmängd, codomän
range	värdemängd
level	level curve – nivåkurva, level surface – nivåyta

En **funktion** eller **transformation** eller **avbildning** f från mängden A till mängden B, skrivs $f : A \to B$.
är en regel som till varje element $x \in A$ ordnar ett element $f(x) \in B$.

A kallas funktionens *definitionsmängd* eller *domän*.

B kallas funktionens *codomän* eller *målmängd*.

I denna kurs är A en delmängd av $\mathbb{R}^n$ och B en delmängd av $\mathbb{R}^m$.

Även om A inte är hela $\mathbb{R}^n$ så kallas ofta en funktion med definitionsmängd A för funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$.

Om definitionsmängden inte anges så menas underförstått att den är alla punkter i $\mathbb{R}^n$ för vilka den angivna funktionsregeln är användbar.

10.5 Andragradskurvor och -ytor

Omfattning och innehåll

11.1 Vektorvärda funktioner, derivering
11.3 Kurvlängd, parametrisering av kurvor.
8.1 – 8.4 Repetition efter behov

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
11.1	derivera vektorvärda funktioner av en variabel genom tillämpning av deriveringsreglerna (se t.ex. exempel 1, sats 11.1.1)
11.1	skissa plana kurvor utgående från given parametrisering (se även 8.2).
11.1, 11.3	bestämma parametrisering av sträckor i rummet samt cirkelbågar, ellipser och funktionskurvor i planet (se även 8.2).
11.1	beräkna kurvtangent, hastighet- och accelerationsvektor samt fart (se även 8.3-8.4).
11.3	förklara vad som menas med båglängdselement och beräkna längden av kurvor (se även 8.3-8.4).
11.3	förklara vad som menas med enkel sluten kurva.

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
11.3	bestämma parametrisering av snitt av ytor
11.3	motivera formeln för beräkning av kurvlängd.

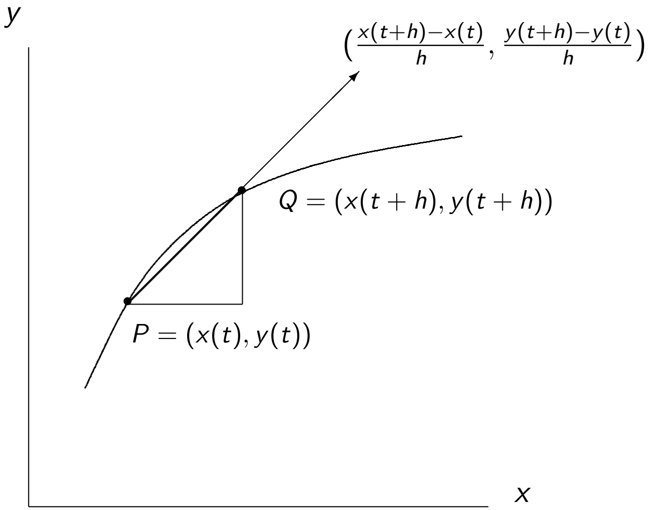
En **vektorvärd funktion av en variabel** är en funktion $\mathbf{r}$ från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}3$

Funktionen skrivs $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$.

Ofta tänker vi på $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ som punktmängder, inte vektorer. Funktionen skrivs då $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Typexempel: Koordinaterna för en partikel som rör sig i ett koordinatsystem där t är tiden och (x, y, z) är punktens koordinater.

Om vi plottar punkterna $(x(t), y(t), z(t))$ för alla t-värden får vi partikelns bana, en kurva i $\mathbb{R}^3$



(matlab:kurvtangentmovie)

tangent

Vektorvärda funktioner av en variabel deriveras koordinatvis:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \frac{d}{dt}(x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

Derivatan ger en *tangentvektor* till kurvan. Därför skriver vi derivatan på vektorform även om vi skriver funktionen på punktform.

Då $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ beskriver en partikelbana kallas $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$ partikelns hastighet.

$v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$ kallas partikelns fart och $\frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t)$ dess acceleration.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\lambda(t)\mathbf{u}(t)) = \lambda'(t)\mathbf{u}(t) + \lambda(t)\mathbf{u}'(t)$$

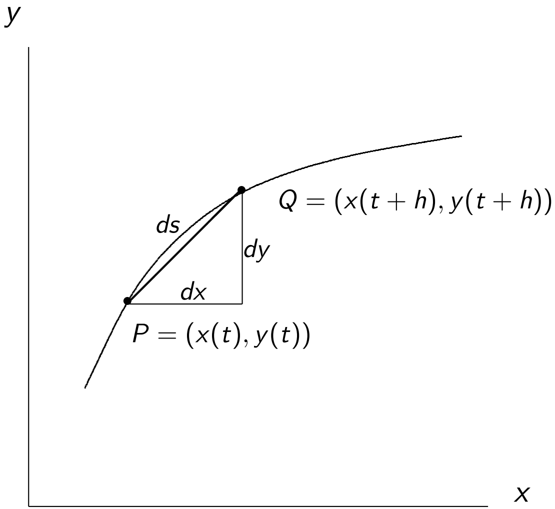
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(\lambda(t))) = \lambda'(t)\mathbf{u}'(\lambda(t))$$

$$\frac{d}{dt}\,\|\mathbf{u}(t)\| = \frac{\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{u}'(t)}{\|\mathbf{u}(t)\|}$$

Kurvlängd



$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}, \quad \text{eller } ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

En kurva som ges av en parametrisering $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad a \leq t \leq b$ har kurvlängd som ges av integralen

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$= \int_a^b \left\| \mathbf{r}'(t) \right\| dt$$

.

Eftersom sträckan är integralen av farten motiverar detta att kalla $\|\mathbf{r}'(t)\|$ en partikels fart.