TMA043 Flervariabelanalys E2 H09

Carl-Henrik Fant

Matematiska vetenskaper
Chalmers
Göteborgs universitet
tel. (arb) 772 35 57
epost: carl-henrik.fant@chalmers.se

17 september 2009

Outline

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
12.7	beräkna gradient och riktningsderivata $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a})$ då $\|\mathbf{u}\| = 1$ (med sats 12.7.7) till en funktion av två eller tre variabler samt utnyttja deras egenskaper (se definition 12.7.7, markerad ruta s 683) vid problemlösning (se t.ex. exempel 3 och 4).
12.7	bestämma ekvationer för tangentlinje och normallinje till nivåkurva samt tangentplan och normallinje till nivåyta (se sats 12.7.6 och t.ex. exempel 6).

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
12.7	definiera begreppen gradient och riktningsderivata, redogöra för och bevisa deras egenskaper (sats 12.7.6, sats 12.7.7 samt markerad ruta s 683).

Definition 6 Gradientvektorn till en funktion, som har partiella derivator, är

$$\nabla f(x,y) = \text{grad } f(x,y) = f_1(x,y)\mathbf{i} + f_2(x,y)\mathbf{j}$$

Sats 6 Om f är differentierbar i punkten (a,b) och $\nabla f(a,b) \neq \mathbf{0}$, så är $\nabla f(a,b)$ normalvektor till nivåkurvan genom punkten (a,b), alltså till kurvan $f(x,y) = f(a,b)$ i xy-planet.

Observera: En normalvektor till *ytan* $z = f(x,y)$ och till tangentplanet i punkten $(a,b,f(a,b))$ är vektorn $f_1(x,y)\mathbf{i} + f_2(x,y)\mathbf{j} - \mathbf{k}$

Kurvan $f(x,y) = f(a,b), \quad z = f(a,b)$ som är funktionsytans skärning med planet $z = f(a,b)$ har oändligt många normalvektorer $f_1(x,y)\mathbf{i} + f_2(x,y)\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, där c är ett godtyckligt reellt tal.

Tänk på *dimensionerna*: Kartan och gradientvektorn är tvådimensionell, funktionsytan och tangentplanet ligger i $\mathbb{R}^3$.

Definition 7

Riktningsderivatan till $f(x,y)$ i punkten (a,b) i riktningen $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$, där $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u^2+v^2} = 1$ är gränsvärdet

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hu, b+hv) - f(a,b)}{h}$$

om gränsvärdet finns.
Annan beteckning är $f_{\mathbf{u}}(a,b)$ (ibland $f'_{\mathbf{u}}(a,b)$).
Av definitionen följer att

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \frac{d}{dt} f(a+tu, b+tv)\Big|_{t=0}$$

Riktningsderivatan är tillväxthastigheten då man följer strålen med riktningsvektor $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$

Sats 7 Om f är differentierbar i (a, b) och $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ är en enhetsvektor så gäller:

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a, b)$$

Notera att $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a, b) = \|\mathbf{u}\| \, \|\nabla f(a, b)\| \cos\theta$ där θ är vinkel mellan $\mathbf{u}$ och $\nabla f(a, b)$.
Eftersom $\|\mathbf{u}\| = 1$ så gäller $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \|\nabla f(a, b)\| \cos\theta$.
Vidare är $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ tillväxthastigheten i riktningen $\mathbf{u}$. alltså gäller:

1. I punkten (a, b) växer f snabbast i riktningen som ges av $\nabla f(a, b)$. Den maximala tillväxthastigheten är $\|\nabla f(a, b)\|$.
2. I punkten (a, b) avtar f snabbast i riktningen som ges av $-\nabla f(a, b)$. Den maximala nedgångshastigheten är $\|\nabla f(a, b)\|$.
3. Tillväxthastigheten i punkten (a, b) är 0 i riktningar parallella med nivåkurvan $f(x, y) = f(a, b)$.

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
12.9	beräkna taylorpolynom av ordning två, till funktioner av två variabler, både genom att utgå från Taylors formel och genom att utnyttja kända Taylorpolynom i en variabel (jmf. exempel 1 och 2).

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
12.9	bestämma taylorpolynom till implicit definierad funktion.

Taylors formel Antag att $f(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator av ordning t.o.m. $n+1$ i en omgivning till punkten (a, b) och antag att punkten $(a+h, b+k)$ ligger i denna omgivning.

Då gäller:

$$f(a+h, b+k) = \sum_{m=0}^{n} (hD_1 + kD_2)^m f(a, b) + R_n(h, k)$$

där $R_n(h, k) = (hD_1 + kD_2)^{n+1} f(a + \theta h, b + \theta k)$ för något tal θ mellan 0 och 1.

Med $x = a + h$ och $y = b + k$ skrivs formeln:

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{n} ((x-a)D_1 + (y-b)D_2)^m f(a, b) + R_n(h, k)$$

Speciellt är Taylorpolynomet av ordning 2 i punkten (a, b):

$$\begin{aligned} P_2(x, y) = f(a, b) + (x-a)f_1(a, b) + (y-b)f_2(a, b) +& \\ \frac{1}{2}\left((x-a)^2 f_{11}(a, b) + 2(x-a)(y-b)f_{12}(a, b) +\right.& \\ \left.(y-b)^2 f_{22}(a, b)\right)& \end{aligned}$$

Taylorpolynomet av ordning 3 i punkten (a, b) är:

$$\begin{aligned} P_3(x, y) = P_2(x, y) + \frac{1}{6}\left((x-a)^3 f_{111}(a, b) +\right.& \\ 3(x-a)^2(y-b)f_{112}(a, b) + 3(x-a)(y-b)^2 f_{122}(a, b) +& \\ \left.(y-b)^3 f_{222}(a, b)\right)& \end{aligned}$$

Polynomen av högre ordning erhålls på samma sätt. Koefficienten framför respektive term är motsvarande binomialkoefficient. Den bestäms enklast med hjälp av Pascals triangel.

Taylorpolynomet av ordning 2 till en funktion $f(x, y, z)$ av tre variabler (eller fler) definieras på motsvarande sätt:

$$\begin{aligned} &P_2(x, y, z) = \\ &f(a, b, c) + \\ &(x-a)f_1(a, b, c) + (y-b)f_2(a, b, c) + (z-c)f_3(a, b, c) + \\ &\tfrac{1}{2}\{(x-a)^2 f_{11}(a, b, c) + (y-b)^2 f_{22}(a, b, c) + (z-c)^2 f_{33}(a, b, c) + \\ &2(x-a)(y-b)f_{12}(a, b, c) + 2(x-a)(z-c)f_{13}(a, b, c) + \\ &2(y-b)(z-c)f_{23}(a, b, c)\} \end{aligned}$$

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
12.8	Inga godkäntmål i detta avsnitt.

Vecka 3 Ht09
12.7 Gradient och riktningsderivata.
12.9 Taylorserier och approximationer
12.8 Implicita funktioner
13.1 Extremvärden
13.2 Extremvärden under bivillkor
13.3 Lagranges multiplikatormetod

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
12.8	visa att en ekvation eller ett system av ekvationer lokalt definierar en funktion implicit samt beräkna funktionens partiella derivator.
12.8	känna till sambandet mellan Jacobideterminanten till en transformation och Jacobideterminanten till inversen (sid. 697).

CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET
Carl-Henrik Fant Adams 12.8, tma043 V3, Ht09

Vecka 3 Ht09
12.7 Gradient och riktningsderivata.
12.9 Taylorserier och approximationer
12.8 Implicita funktioner
13.1 Extremvärden
13.2 Extremvärden under bivillkor
13.3 Lagranges multiplikatormetod

Sats 8, Implicita funktionssatsen

Borde heta: **Satsen om implicit definierade funktioner.** Ger villkor som garanterar att en nivåkurva, nivåyta etc. är graf till en funktion.

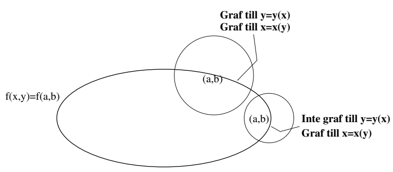
Löst talat: Om normalvektorn $\nabla f(a,b)$ till nivåkurvan $f(x,y) = f(a,b)$, inte är parallell med x-axeln så finns en omgivning U till (a,b) sådan att den del av nivåkurvan som ligger i U är graf till någon funktion $y = y(x)$ med $y(a) = b$.

Är $\nabla f(a,b)$ inte parallell med y-axeln så finns en omgivning V till (a,b) sådan att den del av nivåkurvan som ligger i V är graf till någon funktion $x = x(y)$ med $x(b) = a$.

CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET
Carl-Henrik Fant Adams 12.8, tma043 V3, Ht09

Vecka 3 Ht09
12.7 Gradient och riktningsderivata.
12.9 Taylorserier och approximationer
12.8 Implicita funktioner
13.1 Extremvärden
13.2 Extremvärden under bivillkor
13.3 Lagranges multiplikatormetod

Sats 8, Implicita funktionssatsen



CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET
Carl-Henrik Fant Adams 12.8, tma043 V3, Ht09

Sats 8, Implicita funktionssatsen
Om funktionen $f(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av en punkt (a, b) sådan att $f(a, b) = 0$ och $f_2(a, b) \neq 0$ så definierar ekvationen $f(x, y) = 0$, i närheten av (a, b), en deriverbar funktion $y = y(x)$ sådan att $y(a) = b$ och $f(x, y(x)) = 0$.

Derivatan till $y(x)$ kan beräknas genom implicit derivering (användning av kedjeregeln):

$f(x, y(x)) = 0 \Rightarrow$

$\frac{d}{dx}\left(f(x, y(x))\right) = \frac{d}{dx}0 \Rightarrow$

$f_1(x, y(x)) + f_2(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0$

Speciellt är $y'(a) = -\frac{f_1(a,b)}{f_2(a,b)}$

Om $f_1(a, b) \neq 0$ så definierar ekvationen $f(x, y) = 0$ en funktion $x = x(y)$ sådan att $x(b) = a$ och $x'(b) = -\frac{f_2(a,b)}{f_1(a,b)}$.

Sats 8, Implicita funktionssatsen
Om funktionen $f(x, y, z)$ har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av en punkt (a, b, c) sådan att

$$f(a, b, c) = 0 \quad \text{och} \quad f_3(a, b, c) \neq 0$$

så definierar ekvationen $f(x, y, z) = 0$, i närheten av (a, b, c), en funktion $z = z(x, y)$ sådan att $z(a, b) = c$ och $f(x, y, z(x, y)) = 0$.

De partiella derivatorna till $z(x, y)$ kan beräknas genom implicit derivering (användning av kedjeregeln):

$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x, y, z(x, y))\right) = \frac{\partial}{\partial x}0 \Rightarrow$

$f_1(x, y, z(x, y)) + f_3(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = 0$

Speciellt är $z_1(a, b)) = -\frac{f_1(a,b,c)}{f_3(a,b,c)}$

På samma sätt erhålls $z_2(a, b)) = -\frac{f_2(a,b,c)}{f_3(a,b,c)}$

Jacobideterminanten, Jacobianen till $u = u(x, y)$ och $v = v(x, y)$ är determinanten

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Jacobideterminanten till funktionerna $F(x, y, \cdots)$ och $G(x, y, \cdots)$ med avseende på variablerna x och y är determinanten

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Notera att F och G kan vara funktioner av ytterligare ett antal variabler.
Jacobideterminanten är en funktion av samma variabler som F och G.

Jacobideterminanten $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}$ är motsvarande 3×3-determinant, osv.

Om $\mathbf{f}$ är en funktion från $\mathbb{R}^{m+n}$ till $\mathbb{R}^n$, alltså i princip n funktioner av $m + n$ variabler, så kan variablerna skrivas $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ där $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ och $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Vi har då $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Jacobideterminanten (en $n \times n$-determinantskrivs nu enklast $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}$. Den är en reellvärd funktion av $\mathbf{x}$.

Sats 8, Implicita funktionssatsen
Om funktionerna $f(u, v, x, y)$ och $g(u, v, x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av en punkt (a, b, c, d) sådan att

$$\begin{cases} f(a, b, c, d) = 0 \\ g(a, b, c, d) = 0 \end{cases} \text{ och } \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(a, b, c, d) \neq 0$$

så definierar ekvationssystemet

$$\begin{cases} f(u, v, x, y) = 0 \\ g(u, v, x, y) = 0 \end{cases}, \text{ i närheten av } (a, b, c, d),$$

funktioner $x = x(u, v)$ och $y = y(u, v)$ sådana att

$$\begin{cases} x(a, b) = c \\ y(a, b) = d \end{cases} \text{ och } \begin{cases} f(u, v, x(u, v), y(u, v)) = 0 \\ g(u, v, x(u, v), y(u, v)) = 0 \end{cases}.$$

De partiella derivatorna till $x(u, v)$ och $y(u, v)$ kan beräknas genom implicit derivering (användning av kedjeregeln): till exempel

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(f(u, v, x(u, v), y(u, v))\right) = 0 \Rightarrow$$

$$f_1(u, v, x(u, v), y(u, v)) + f_3(u, v, x(u, v), y(u, v)) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + f_4(u, v, x(u, v), y(u, v)) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) = 0$$

På samma sätt deriveras den första ekvationen med avseende på v och den andra med avseende på u och v. Detta ger fyra ekvationer ur vilka de partiella derivatorna till $x(u, v)$ och $y(u, v)$ kan beräknas.

De fyra ekvationerna ovan kan skrivas på matrisform.

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_3 & f_4 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Här skall f_i läsas $f_i(u, v, x(u, v), y(u, v))$ och de partiella derivatorna av x och y skall tas i punkten (u, v).

Matrisen $\begin{bmatrix} f_3 & f_4 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}$ är inverterbar eftersom dess determinant är $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$ som är nollskild i närheten av (a, b, c, d).
Alltså gäller:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_3 & f_4 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{bmatrix}.$$

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
13.1	definiera begreppen lokalt maximum/minimum, sadelpunkt, globalt maximum/minimum, kritisk punkt och singulär punkt.
13.1	bestämma kritiska/stationära punkter för $f(x, y)$, där ekvationssystemet $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ är relativt enkelt samt klassificera de kritiska punkterna med hjälp av sats 13.1.3 eller remark s 712.

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
13.1	bestämma kritiska/stationära punkter för $f(x, y)$, där ekvationssystemet $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ är mer komplicerade, samt klassificera de kritiska punkterna med hjälp av taylorutveckling av andra ordningen (se t.ex exempel 13.1.5).

En funktion har lokalt maximum i en punkt (a, b) om det finns en omgivning $B_r(a, b)$ sådan att

$$f(x, y) \leq f(a, b) \ \text{ för alla } (x, y) \in D_f \cup B_r(a, b)$$

En funktion har globalt maximum i en punkt (a, b) om

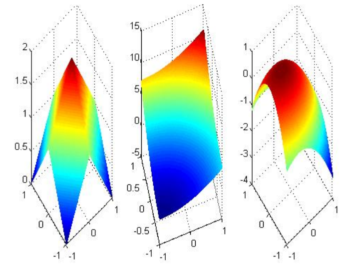
$$f(x, y) \leq f(a, b) \ \text{ för alla } (x, y) \in D_f$$

Sats 1 Lokalt maximum kan erhållas i:

- punkt där gradienten inte existerar,
- punkt på randen av definitionsområdet,
- punkt där grad $f(x, y) = \mathbf{0}$ s.k. *kritisk punkt*

Vecka 3 H09
12.7 Gradient och riktningsderivata.
12.9 Taylorserier och approximationer
12.8 Implicita funktioner
13.1 Extremvärden
13.2 Extremvärden under bivillkor
13.3 Lagranges multiplikatormetod

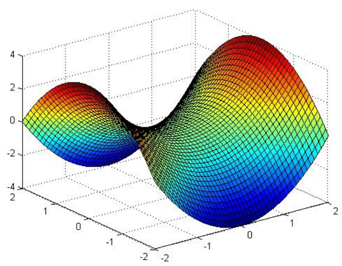
Exempel på lokala maxima (som också råkar vara globala).



CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET
Carl-Henrik Fant Adams 13.1, tma043 V3, Ht09

Vecka 3 H09
12.7 Gradient och riktningsderivata.
12.9 Taylorserier och approximationer
12.8 Implicita funktioner
13.1 Extremvärden
13.2 Extremvärden under bivillkor
13.3 Lagranges multiplikatormetod

Sadelpunkt



CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET
Carl-Henrik Fant Adams 13.1, tma043 V3, Ht09

Vecka 3 H09
12.7 Gradient och riktningsderivata.
12.9 Taylorserier och approximationer
12.8 Implicita funktioner
13.1 Extremvärden
13.2 Extremvärden under bivillkor
13.3 Lagranges multiplikatormetod

Sats 13.1.2

Existens av extremvärde.
Om f är kontinuerlig i ett slutet, begränsat och sammanhängande område, D, så är $f(D)$ ett slutet och begränsat intervall.

Speciellt har funktionen ett största värde och ett minsta värde i D. I de punkter dessa värden antas, har f lokalt maximum respektive lokalt minimum.de är alltså endera

- singulära punkter,
- randpunkter eller
- kritiska punkter.

CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET
Carl-Henrik Fant Adams 13.1, tma043 V3, Ht09

Kravet att D är sammanhängande (varje par av punkter i D kan förbindas med en kurva i D) är väsentligt. Jämför med kontinuitet på intervall.

För mängder som inte är sammanhängande gäller i allmänhet inte satsen om mellanliggande värde.

Hur avgör man om en kritisk punkt är extrempunkt?

Antag att funktionen f har kontinuerliga partiella derivator av ordning ett och två i en omgivning till punkten (a, b).

Med *Hesse-matrisen*, eller *Hessianen* i (a, b) menas:

$$\mathscr{H}(a,b) = \begin{bmatrix} f_{11}(a,b) & f_{12}(a,b) \\ f_{21}(a,b) & f_{22}(a,b) \end{bmatrix}$$

.

Då ges taylorpolynomet till f i punkten (a, b), om vi sätter $x - a = h$ ochy $- b = k$, av

$$P_2(x,y) = f(a,b) + hf_1(a,b) + kf_2(a,b) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \mathscr{H}(a,b) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

Sats 3: Klassificering av kritiska punkter med andraderivatorna

Antag att (a, b) är en kritisk punkt för funktionen $f(x, y)$ i det inre av definitionsmängden. Antag också att f har kontinuerliga partiella derivator av ordning ett och två.

Då gäller följande:

- Om $\mathscr{H}(a, b)$ är positivt definit, så har f lokalt minimum i (a, b)
- Om $\mathscr{H}(a, b)$ är negativt definit, så har f lokalt maximum i (a, b)
- Om $\mathscr{H}(a, b)$ är indefinit, så har f sadelpunkt i (a, b)
- Om $\mathscr{H}(a, b)$ inte är något av ovanstående, så ger satsen inget.

Sats 3: Klassificering av kritiska punkter med andraderivatorna

Antag att (a, b) är en kritisk punkt för funktionen $f(x, y)$

- Om det $\mathscr{H}(a, b) > 0$ och $f_{11}(a, b) > 0$ så har f lokalt minimum i (a, b)
- Om det $\mathscr{H}(a, b) > 0$ och $f_{11}(a, b) < 0$ så har f lokalt maximum i (a, b)
- Om det $\mathscr{H}(a, b) < 0$ så har f sadelpunkt i (a, b)
- Om det $\mathscr{H}(a, b) = 0$ så ger denna test ingen information, taylorpolynom av högre ordning måste användas.

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
13.2 13.3	tillämpa sats 13.1.1 för att bestämma största och minsta värde för $f(x, y)$, på kompakt mängd då det är relativt enkelt att bestämma både kritiska punkter i det inre och största/minsta värde på randen.

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
13.2 13.3	lösa problem enligt godkäntmålen där ekvationssystemen inte är enkla, eller dimensionen > 2, eller flera bivillkor.

Med största värdet av $f(x, y)$ på en mängd D, som förutsätts vara en delmängd av f:s definitionsområde D_f, menas största värdet av f för punkter som ligger i D.

Ofta används beteckningen $f(D)$ för

$$\{z : z = f(x, y) \text{ för något } (x, y) \in D\}.$$

Största värdet av $f(x, y)$ på D är alltså det största talet i $f(D)$, om det finns ett sådant.

Ofta ges D av en eller flera olikheter eller ekvationer som $g(x, y) \leq 0$ eller $g(x, y) = 0$.

T.ex. ger olikheten $9x^2 + 4y^2 - 36 \leq 0$ en elliptisk skiva och ekvationen $9x^2 + 4y^2 = 36$ en ellips.

Då D ges på detta sätt kallas största värdet av f på D ofta största värdet av f under *bivillkoret* $g(x, y) \leq 0$ eller $g(x, y) = 0$.

Man säger också att f har lokalt maximum i punkten (a, b) under bivillkoret $g(x, y) \leq 0$ om punkten uppfyller bivillkoret och $f(x, y) \leq f(a, b)$ för alla punkter (x, y) som uppfyller bivillkoret och ligger i någon lämplig omgivning till (a, b).

Lärmål

För betyget godkänd skall du kunna:

Adams	Mål
13.3	bestämma extremvärden för $f(x, y)$, eller $f(x, y, z)$ under bivillkor $g(x, y) = 0$, eller $g(x, y, z) = 0$, med Lagranges multiplikator-metod då den leder till relativt enkelt ekvationssystem.

Lärmål

För högre betyg skall du dessutom kunna:

Adams	Mål
13.3	motivera Lagranges multiplikatormetod

Sats 4: Lagranges multiplikatormetod

Antag att

- funktionerna f och g har kontinuerliga första ordningens partiella derivator i en omgivning av punkten (a, b)
- punkten (a, b) ligger på kurvan $\mathcal{C} : g(x, y) = 0$ (dvs. $g(a, b) = 0$)
- f har lokalt maximum eller minimum i (a, b) under bivillkoret $g(x, y) = 0$
- punkten (a, b) är inte en ändpunkt till kurvan $\mathcal{C}$
- $\nabla g(a, b) \neq \mathbf{0}$

Då finns ett tal λ så att (a, b, λ) är kritisk punkt för *Lagrangefunktionen* $\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.

Att (a, b, λ) är kritisk punkt för $\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ innebär att $\nabla f(a, b)$ och $\nabla g(a, b)$ är parallella.
Detta innebär i sin tur att nivåkurvan $f(x, y) = k$ där $k = f(a, b)$ och kurvan $g(x, y) = 0$ tangerar varandra i punkten (a, b).
Metoden är användbar också för funktioner av tre variabler:

(a, b, c, λ) är kritisk punkt för $\Phi(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$ innebär att nivåytan $f(x, y, z) = k$ där $k = f(a, b, c)$ tangerar ytan $g(x, y, z) = 0$ i punkten (a, b, c).

Exempel: Extremvärde under bivillkor

Vi söker största och minsta värdet för funktionen $f(x, y) = xy + 50$ då punkten (x, y) ligger på ellipsen $x^2 + 4y^2 = 32$.